



Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Institut für Operations Resesarch (IOR)
Diskrete Optimierung und Logistik
Prof. Dr. Stefan Nickel

Bachelorarbeit

Bekannte Methoden zur Messung der
Kompaktheit von Gebieten und deren
Anwendbarkeit auf punktförmige
Basisgebiete

von

Peter Köhler

Matr. Nr.: 1404382

Wirtschaftsingenieurwesen

Datum der Abgabe

12.03.2013

Betreuung:

Alexander Butsch

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiernit wahrheitsgemäß, die Arbeit selbständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderung entnommen wurde.

Datum

12.3.2018

Name

Alu Wlu

Inhaltsverzeichnis	
1 Einleitung	1
2 Kompaktheitsmaße in der Theorie	2
2.1 Definition von Kompaktheit	2
2.2 Kompaktheit in der Literatur	2
2.3 Historische Entwicklung von Kompaktheit	3
2.4 Quantitative Kompaktheitsmaße	4
2.4.1 Intuitive Betrachtung	4
2.4.2 Theoretische Überlegungen zur Messung von Kompaktheit	5
2.4.3 Anforderungen an ein Kompaktheitsmaß	6
3 Klassifikation von Kompaktheitsmaßen	8
3.1 Streuungsmaße	8
3.1.1 Länge zu Breite	9
3.1.2 Fläche zu Fläche	10
3.1.3 Flächenträgheitsmaße	12
3.2 Umfangsmaße	16
3.2.1 Summe der Gebietsumfänge	17
3.2.2 Umfang zu Fläche	18
3.3 Bevölkerungsmaße	20
3.4 Andere Maße	22
3.4.1 Maß von Papayanopoulos (1973)	22
3.4.2 Taylor-Test (1973)	22
4 Anwendung von Kompaktheitsmaßen in der politischen Gebietsplanung	24
4.1 Niemi et al.'s empirischer Vergleich von Gebietsplänen	24
4.1.1 Eingangüberlegungen	24
4.1.2 Empirische Untersuchungen der Kompaktheit in realen Gebietsplänen	24
4.1.3 Diskussion	26
4.1.4 Schlussfolgerung	27
5 Kompaktheitsmessung punktförmiger Basisgebiete	29
5.1 Punkt-Kompaktheitsmaße mit l_2 -Metrik	30
5.1.1 Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß	31
5.1.2 Punkt zu Schwerpunkt-Kompaktheitsmaß	33
5.1.3 l_2 -Center-Kompaktheitsmaß	34
5.1.4 l_2 -Median-Kompaktheitsmaß	36
5.1.5 Fazit	37
5.2 Punkt-Kompaktheitsmaße mit l_2^2 -Metrik	37

5.2.1	Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß	37
5.2.2	Punkt zu Schwerpunkt-Kompaktheitsmaß	38
5.2.3	l_2^2 -Center-Kompaktheitsmaß	39
5.2.4	l_2^2 -Median-Kompaktheitsmaß	41
5.2.5	Fazit	42
5.3	Einzelpunkte zu Flächen	42
5.3.1	Raster von Laporte et al.	43
5.3.2	Voronoi-Diagramme	46
5.3.3	Fazit	49
5.4	Punktmengen zu Flächen	50
5.4.1	Konvexe Hülle	50
5.4.2	Umschreibendes Rechteck	52
5.4.3	Eigener Ansatz	53
6	Zusammenfassung	56
A	Anhang 1	57
A.1	Erklärung	57
	Literaturverzeichnis	61

1 Einleitung

Das Ziel der Gebietsplanung ist es, geographische Einheiten unter Einhaltung von Nebenbedingungen in kleinere Teilgebiete aufzuteilen oder auch kleinere Gebiete zu übergeordneten Gebieten (z.B. Bezirken) zusammenzufassen. Typische Anwendung für die Gebietsplanung sind Logistik, Distribution oder kommunale Planung. Im politischen Kontext ist für Gebietsplanungsentscheidungen das wichtigste Kriterium das sogenannte „one man-one vote“-Prinzip, also eine möglichst gleichmäßige Aufteilung der Bevölkerung auf diese Gebiete. Ist das „one man-one vote“-Prinzip erfüllt, sollten außerdem noch weitere wichtige Kriterien eingehalten werden: unter anderem sollten die Gebiete benachbart (nicht überlappend) und kompakt sein.

Die Forderung nach Kompaktheit in der Gebietsplanung entstand erstmals im neunzehnten Jahrhundert in den Vereinigten Staaten. Aufgrund des Mehrheitswahlrechts kann die Gebietseinteilung entscheidend für den Wahlausgang sein. Dies wurde erstmals deutlich, als der damalige Gouverneur von Massachusetts, Elbridge Gerry, ein salamanderförmiges Wahlgebiet geformt hatte, um einen Vorteil bei der Wahl zu erhalten. Nach Elbridge Gerry wurde seither der Begriff „Gerrymandering“ geprägt, womit eine Manipulation von Gebieten zum Vorteil einer Wählergruppe bezeichnet wird.

Das Ziel von Kompaktheit in der Gebietsplanung ist, mittels mathematischen Standards „Gerrymandering“ zu verhindern, also „seltsam“-geformte Gebiete in schon vorhandenen Gebietsplänen zu identifizieren oder in neuen Gebietsplänen zu verhindern.

Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf die theoretische Studie von Kompaktheitsmaßen von Young (1988), und auf die theoretischen und empirischen Studien von Niemi et al. (1990) und Horn et al. (1993). Eine weitere führende Vergleichsstudie von Diane Manninen (1973) konnte leider nicht abgerufen werden; die Druckausgabe befindet sich in der Universität Washington. Allerdings werden ihre wichtigsten Ergebnisse in den anderen genannten Werken zusammengefasst.

Auch in der Verkaufsgebietsplanung ist Kompaktheit relevant. Kompaktheit dient hier als Indikator für die Optimierung der Gebietseinteilung (z.B. hinsichtlich Routen, Fahrtzeiten, Kundenstandorten).

In der Verkaufsgebietsplanung stellen Punkte Basisgebiete dar. Aus diesen Basisgebieten werden mittels Gebietsplanungsalgorithmen Gebiete gebildet. Die Kompaktheit dieser Gebiete soll berechnet werden. Dies kann mittels Kompaktheitsmaßen für Punkte erfolgen. Alternativ kann man aus den Gebieten Flächen formen und die aus der Literatur bekannten Kompaktheitsmaße für Flächen darauf anwenden.

2 Kompaktheitsmaße in der Theorie

In diesem Abschnitt werden eingangs drei verschiedene Definitionen von Kompaktheit vorgestellt. Anschließend wird vorab ein kurzer Überblick über die vorhandene Literatur und die historische Entwicklung der Kompaktheit in der Gebietsplanung gegeben. Dann werden die in der Literatur vorhandenen Studien zu Kompaktheitsmaßen zusammengefasst.

2.1 Definition von Kompaktheit

Für den Begriff Kompaktheit gibt es verschiedene Definitionen:

- Nach Webster (1961) ist eine kompakte Figur eine „homogene und in einem begrenzt definierten Raum befindliche Figur, die nicht über ein weitläufiges Gebiet gestreut ist“. [Young]
- American Heritage definiert eine Figur als kompakt, wenn ihre Teile in einem relativ kleinen Raum eng zusammengepackt sind. [Niemi et al.]
- gegenteilige Definition von Kompaktheit: Je weiter sich eine Figur ausbreitet, desto schlechter ist ihre Kompaktheit. [Niemi et al.]

Der einfachste aller Tests für Kompaktheit beruht auf der Einschätzung nach Augenschein (siehe Figuren 1-4 Abbildung 1). Dieser Test kann aber bereits bei einfachen Figuren versagen: Ist der Apfel aus Figur 4 eine kompakte Figur, oder nicht?

2.2 Kompaktheit in der Literatur

Die oben aufgeführten Definitionen von Kompaktheit sind schwammig und intuitiv. Deshalb gibt es auch keinen allgemein anerkannten Standard, anhand dessen man messen kann, ob ein Gebiet kompakt oder nicht kompakt ist: Von den im Folgenden besprochenen Maßen sind zwar einige besser als die restlichen; dennoch ist jedes Maß in irgendeiner Form fehlerbehaftet.

Deshalb sind Studien über Kompaktheit zwiespaltig. Einigen Autoren bewerten sie als überholt, irrelevant und als bevorzugend für eine Partei abgetan: Young schlussfolgert in seiner theoretischen Studie zu Kompaktheitsmaßen, dass Kompaktheit kein ausreichend präzises Konzept ist, um als gesetzliche Grundlage für Gebietspläne zu dienen. [Young] Andere Autoren wie Niemi et al. und Horn et al. gehen mit dem Konzept Kompaktheit pragmatischer um. Sie sehen in ihr eine Chance, sich gegen „Gerrymandering“ abzusiichern. Sie wenden die vorhandenen Kompaktheitsmaße in empirischen Untersuchungen auf bestehende Gebietspläne an und kommen dabei zu recht zufriedenstellenden Ergebnissen. Aber auch sie betrachten Kompaktheit teilweise kritisch und stellen die Forderung nach „präziseren Maßen“ auf. [Niemi et al.]

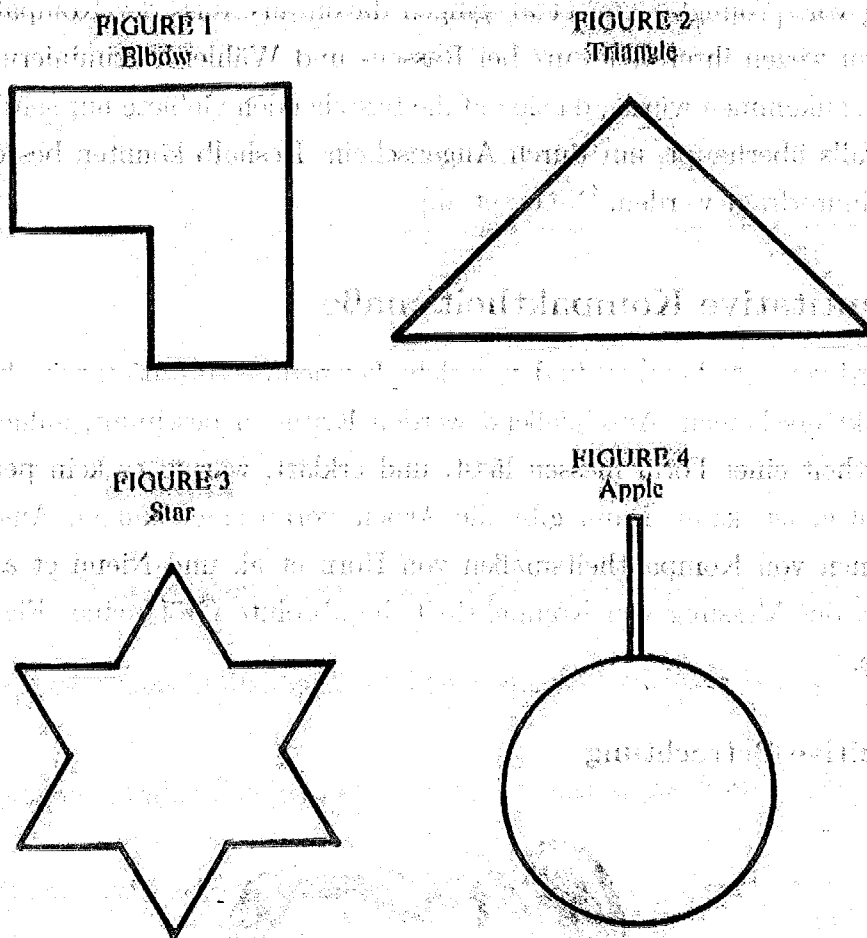


Abbildung 1: Figuren 1-4 im visuellen Vergleich [Young]

2.3 Historische Entwicklung von Kompaktheit

Der Ursprung von Kompaktheit bei der Gebietsplanung liegt in den Vereinigten Staaten. Auch hier wurde bis Anfang der 1970er Jahre Kompaktheit als Kriterium bei der Wahlbezirkseinteilung komplett ignoriert: eine ausgeglichene Bevölkerungsanzahl der Gebiete war maßgebend für die Bewertung von Gebietseinteilungen. In den 1970er und 1980er Jahren wurde Diskriminierung zum Thema und Kompaktheit spielte eine größere Rolle. [Niemi et al.] In den 1980er Jahren wurde Kompaktheit vom Supreme Court als justiziables Kriterium anerkannt, um „Gerrymandering“ von Wählergruppen zu verhindern. Bezüglich der Priorität gab es allerdings Meinungsverschiedenheiten: Einige Richter betrachteten Kompaktheit als nachrangig gegenüber anderen Kriterien. [Niemi et al.] Dennoch ist Kompaktheit als Ziel in der Gebietsplanung nicht mehr wegzudenken. In den Medien wurde die Form von Gebieten bereits diskutiert, außerdem beschäftigen sich bereits niedrigere Gerichte in den Vereinigten Staaten mit Kompaktheit betreffend der Diskriminierung von Wählergruppen. Ungefähr die Hälfte aller Staaten in den Vereinigten Staaten schrieb gegen Ende der 1980er Jahre Kompaktheit in irgendeiner Form als Standard für die Ge-

bietsplanung vor. [Young] Niemi et al. gingen davon aus, dass der Kompaktheit in den 1990er Jahren wegen ihrer Relevanz bei Rassen- und Wählerdiskriminierung eine noch größere Rolle zukommen würde, da sie auf die bestehenden Gebiete nur selten angewandt wurde und falls überhaupt, nur durch Augenschein. Deshalb könnten bestehende Pläne zunehmend hinterfragt werden. [Niemi et al.]

2.4 Quantitative Kompaktheitsmaße

Zunächst wird versucht herauszufinden, welche Formen der Intuition nach kompakt bzw. nicht kompakt erscheinen. Anschließend werden Kriterien bestimmt, anhand derer sich die Kompaktheit einer Form messen lässt, und erklärt, warum es kein perfektes Kompaktheitsmaß geben kann. Dann gibt die Arbeit vorab einen kurzen Ausblick auf die Klassifikationen von Kompaktheitsmaßen von Horn et al. und Niemi et al. und untersucht, ob bei der Messung von Kompaktheit die absolute Größe einer Figur eine Rolle spielen sollte.

2.4.1 Intuitive Betrachtung

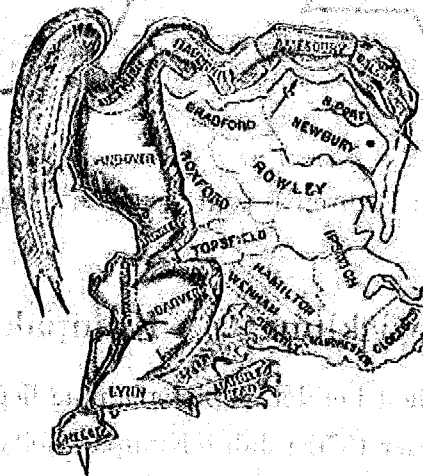


Abbildung 2: Satirische Darstellung der Wahlbezirke von Massachusetts von 1812. (Boston Gazette, 1812)

Einfache Formen, die intuitiv als kompakt eingeschätzt werden, sind das Quadrat oder der Kreis. Intuitiv nicht kompakt sind Formen, die lang und dünn sind, Formen mit ausgreifenden Fingern oder solche, deren Aussehen „unnormale“ ist, wie beispielsweise die salamanderförmige Form (Abbildung 2) des Wahlgebiets von Elbridge Gerry. [Niemi et al.]

Aus der intuitiven Betrachtung kann man zunächst folgern, dass Ausdehnung und Streuung wichtige Aspekte eines vernünftigen quantitativen Kompaktheitsmaßes sind.

2.4/2 Theoretische Überlegungen zur Messung von Kompaktheit

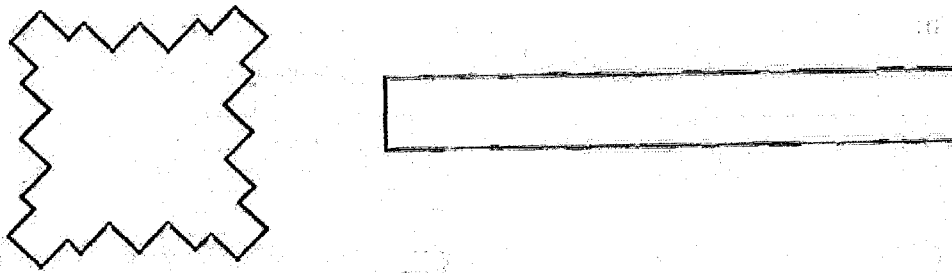


Abbildung 3: Zwei Figuren mit demselben Umfang und derselben Fläche. (Manninen, 1973)

Wie lässt sich Kompaktheit messen? Zunächst könnte man die Länge des Umfangs einer Figur messen und dies als Maß für die Kompaktheit verwenden. Jedoch kann einfach gezeigt werden, dass Umfangslänge alleine nicht ausreichend ist, um der intuitiven Definition von Kompaktheit zu entsprechen:

- Bei gegebener Umfangslänge lassen sich viele verschiedene Formen zeichnen, die sich in ihrer Ausbreitung und Streuung stark unterscheiden. Berücksichtigt ein Kompaktheitsmaß nur den Umfang, sind die linke Figur in Abbildung 3 („eingezacktes Quadrat“) und die rechte Figur („Balken“) gleich kompakt, obwohl sich nach Augenschein beide Figuren in ihrer Kompaktheit stark unterscheiden können.
- Quantitative Maße vergleichen jede Form mit einer kompakten Standardform. Als Standardform wird für gewöhnlich der Kreis gewählt, da er bei gegebenem Umfang die größte Fläche mit sich bringt: Der Kreis ist also die Form, für die das Verhältnis Umfang zu Fläche am kleinsten ist, was man als „dicht gepackt“ oder kompakt interpretieren kann. Manninen vergleicht zwei Formen (Abbildung 3), wovon eine eine punktsymmetrische Figur (a) ist, die ursprünglich die Form eines Quadrats hatte und aus deren Fläche Zacken entfernt wurden. Die andere Figur eines Balkens (b) ist nach der intuitiven Definition von Kompaktheit offensichtlich intuitiv weniger kompakt als Figur (a); beide besitzen aber dieselbe Fläche und denselben Umfang und erzielen so nach den klassischen Kompaktheitsmaßen denselben Kompaktheitswert. [Niemi et al.]

Also muss ein Kompaktheitsmaß eine weitere Komponente berücksichtigen: die Streuung. Streuung — für sich allein genommen — ist allerdings auch kein zufriedenstellender Indikator für Kompaktheit, denn bei Streuungsmaßen werden Umfangsirregularitäten, insbesondere solche, die „Gerrymandering“ signalisieren, nicht berücksichtigt:

- Eine nahezu kreisrunde Form, die in einem Streuungsmaß also einen sehr guten Kompaktheitswert erhält, dessen Umfang aber gezackt oder gewunden aussieht, würde den Verdacht erregen, „Gerrymandering“ zu betreiben.

Allgemeiner ausgedrückt: Es ist möglich, unterschiedliche Formen zu konstruieren, die in Streuungsmaßen konstante Werte erhalten, aber in den Umfangsmaßen beliebig schlecht abschneiden:

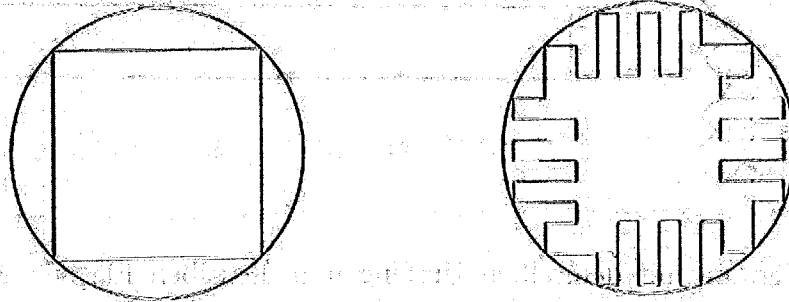


Abbildung 4: Ein Quadrat im Vergleich mit Quadrat mit Ausstülpungen; beide Figuren haben dieselbe Fläche. (eigene Darstellung)

- Nimmt man beispielsweise ein Streuungsmaß, das die Fläche eines Quadrates mit der des kleinsten umschreibenden Kreises vergleicht und fügt dann dem Quadrat an einer Stelle Ausstülpungen hinzu, die den Kreis nicht überschneiden, während man an anderer Stelle genau diese Ausstülpungen aus dem Quadrat entfernt, steigt der Umfang unbegrenzt (ein Umfangsmaß zeigt beliebig schlechte Werte an) während der Wert des Streuungsmaßes unverändert bleibt. Diese Problematik ist in Abbildung 4 in Figuren a und b verdeutlicht. Das Streuungsmaß (Reock-Test, 3.1.2.1) bleibt in beiden Fällen konstant, da sich die Fläche — wie beschrieben — nicht ändert. Ein Umfangsmaß (Schwartzberg-Test, 3.2.2.1) hingegen verschlechtert sich erheblich.

2.4.3 Anforderungen an ein Kompaktheitsmaß

Aus den obigen theoretischen Überlegungen kann man folgern, dass ein zufriedenstellendes Kompaktheitsmaß, welches Ausdehnung und Streuung berücksichtigt und gleichzeitig „Gerrymandering“ verhindert, zwei Komponenten — Streuung und Umfang — messen müsste. Niemi et al. stellen jedoch fest, dass es das „perfekte Kompaktheitsmaß“ nicht geben kann: Sie sehen das Problem nicht in der schwammigen Definition der Kompaktheit, sondern darin, dass Kompaktheit mehrdimensional ist. Man kann zwar ein Kompaktheitsmaß schaffen, das Streuung wie Umfang beinhaltet — dies würde aber bedeuten, dass man eine Entscheidung über ihre relative Wertigkeit treffen müsste: Bildet man beispielweise den Durchschnitt, weist man beiden Komponenten implizit dieselbe Wertigkeit zu. Schon das ist aber eine willkürliche Festlegung. Auch andere Autoren stimmen mit Niemi et al. darin überein, dass es das perfekte Kompaktheitsmaß nicht gibt:

- Young sieht in Kompaktheit gar „ein nicht ausreichend präzises Konzept, das nicht als gesetzliche Grundlage für Gebietspläne dienen sollte“. Er zweifelt an, ob es

überhaupt einen mathematischen Standard gibt, mit dem die Kompaktheit eines Gebietes beurteilen kann. [Young] Niemi et al. sind optimistischer als Young und schlagen eine Lösungsstrategie vor, um die „Schwächen“ von Kompaktheit zu beheben: man sollte bei der Untersuchung von Gebietsplänen mehrere Kompaktheitsmaße gleichzeitig anzuwenden und bei der Bewertung der Kompaktheit der Pläne ihre relative Übereinstimmung heranziehen. [Niemi et al.]

- Horn et al. stimmen Niemi et al. zu, dass es in der Theorie kein perfektes Kompaktheitsmaß gibt. Sie verfolgen allerdings einen anderen Ansatz als Young und Niemi et al.: Nicht die Aufdeckung und Verhinderung von „Gerrymandering“ sollte das oberste Ziel sein, sondern Transparenz schon bei der Gebietsplanungsprozedur. [Horn et al.]

Eine Ausgangsfrage ist, ob ein Kompaktheitsmaß die absolute Größe eines Gebiets berücksichtigen sollte, oder ob es skalenunabhängig sein sollte: Sollte ein quadratisches Gebiet mit zwei Kilometer Kantenlänge denselben Kompaktheitswert erhalten, wie ein ebenfalls quadratisches Gebiet mit 80 Kilometer Kantenlänge? Oder sollte ein großes, aber kreisförmiges Gebiet denselben Kompaktheitswert bekommen, wie ein kleines, aber unförmiges Gebiet? [Niemi et al.]

In der Vergangenheit, als es noch keine gut ausgebauten Kommunikations- und Straßennetze existierten, wurde argumentiert, dass absolute Größe für die Messung von Kompaktheit relevant sei. Heutzutage — im Zeitalter moderner Kommunikations- und Transportmittel — tritt die absolute Größe eines Gebiets in den Hintergrund. [Niemi et al.] Ferner hätte ein Kompaktheitsmaß, das von der absoluten Größe der Gebiete abhängig ist, die Tendenz, kleine städtische von größeren ländlichen Gebieten eher homogen zu trennen, als sie zusammenzufassen. Die Frage, ob ländliche mit städtischen Gebieten zusammengefasst werden sollten, sollte aber kein Gegenstand eines Kompaktheitsmaßes sein. Daher sollte Größe bzw. Skala bei der Messung von Kompaktheit keine Rolle spielen [Niemi et al.]. Manninen und Horn et al. sehen Größe ebenfalls als nicht relevant für Kompaktheit an. [Horn et al.] Auch Young stellt fest, dass ein Maß nicht zwischen ländlichen und städtischen Gebieten unterscheiden, also Größe nicht berücksichtigen sollte. Wenn Skala also keine Rolle spielt, sollte man den Wertebereich von Kompaktheitsmaßen, sofern möglich, auf ein $[0,1]$ -Intervall bringen, wobei höhere Werte bessere Kompaktheit signalisieren sollen. Dies vereinfacht Vergleiche verschiedenener Kompaktheitsmaße. Jedoch gelingt es nicht immer, Maße auf dieses Intervall zu bringen.

3 Klassifikation von Kompaktheitsmaßen

Da Kompaktheit — wie oben festgestellt — ein mehrdimensionales Konzept ist, kann sie nur anhand mehrerer Komponenten, nämlich Streuung und Umfang, gemessen werden. Deshalb klassifizieren Niemi et al. alle in ihrer Aufstellung (s. Anhang Tabellen 1-4) berücksichtigten 24 Kompaktheitsmaße jeweils danach, was sie ihrer Auffassung nach überwiegend messen. Es wird eine Einteilung in vier Klassen vorgenommen, von denen die zwei wichtigsten „Streuungsmaße“ (s. Anhang Tabelle 1) und „Umfangmaße“ (s. Anhang Tabelle 2) sind. Niemi et al. übernehmen alle sieben Kompaktheitsmaße, die von Young untersucht wurden, sowie zehn der insgesamt 15 Kompaktheitsmaße von Manninen. Horn et al. treffen eine andere, feinere Einteilung in Form-Bevölkerungsmaße (s. Anhang Tabelle 5) und reine Formmaße (s. Anhang Tabelle 6). Sie übernehmen alle Kompaktheitsmaße aus Niemi et al.'s Klassifikation und fügen die restlichen fünf Kompaktheitsmaße von Manninen und fünf weitere hinzu. Nach Meinung des Autors dieser Arbeit trifft aber die Klassifikation von Niemi et al. in Umfangs- und Streuungsmaße bereits den Kern und ist intuitiver als die von Horn et al., da Form-Bevölkerungsmaße nicht die Bedeutung haben, die eine eigene Klasse rechtfertigen würde.

Im Folgenden wird, ausgehend von der Klassifikation Niemi et al.'s, eine eigene Klassifikation erstellt, die die Ausführungen der drei Studien von Niemi et al., Horn et al. und Young zu Kompaktheitsmaßen zusammenträgt. Sie gliedert sich in vier Klassen: Streuungsmaße (Abschnitt 3.1), Umfangmaße (Abschnitt 3.2), Bevölkerungsmaße (Abschnitt 3.3) und andere Maße (Abschnitt 3.4).

3.1 Streuungsmaße

Die erste Kategorie, Streuungsmasse (Tabelle 1), stellen fest, wie dicht gepackt oder ausgreifend die Geografie eines Gebiets ist. Sie werden unterteilt in die Gruppen Länge zu Breite Maße, Fläche zu Fläche-Maße und Flächenträgheitsmaße.

Tabelle 1: Streuungsmaße [nach Niemi et al., eigene Darstellung]

Länge zu Breite

Dis_{young} - L/B - L und B sind Länge bzw. Breite des umschreibenden Rechtecks, das das Gebiet an allen vier Seiten berührt und für das L/B maximal ist. Die Werte liegen im Intervall $[1, \infty]$.

Dis_3 - B/L - B und L sind Breite bzw. Länge des umschreibenden Rechtecks, das das Gebiet an allen vier Seiten berührt und für das B/L maximal ist. Dies ist der Umkehrbruch von Dis_{young} , da so ein $[0, 1]$ -Intervall erreicht wird.

Dis_{papa} - Rechteck wie in Dis_3 ; $Dis_{papa} = \max\{L, B\}$.

Fläche zu Fläche-Maße

Dis_7 - Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit der Fläche des minimal-umschreibenden Kreises (Reock 1961). $Dis_7 = \frac{A_{\text{Gebiet}}}{A_{\text{Umkreis}}}$ wobei A die Gebietsfläche ist.

Dis_{10} - Verhältnis der Gebietsfläche zu Fläche des Kreises mit einem Durchmesser gleich der längsten Achse des Gebiets (Gibbs 1961). $Dis_{10} = \frac{A}{\pi(\frac{L}{2})^2}$

Flächenträgheitsmomente

Dis_{hess} - Flächenträgheitsmoment zum Schwerpunkt des Gebiets. (Weaver-Hess)

Dis_{kaiser} - Flächenträgheitsmoment zum Mittelpunkt des Gebiets dividiert durch das Flächenträgheitsmoment eines Kreises. (Kaiser)

$Dis_{\text{kaiser,kehr}}$ - Kehrbrech vom Kaiser-Flächenträgheitsmoment.

Dis_{12} - Durchschnittliche Entfernung des Schwerpunkts des Gebiets zu den Außenecken des Gebiets entlang einer Menge gleichmäßig entfernter Radiallinien. (Boyce-Clark 1964).

3.1.1 Länge zu Breite

Länge zu Breite-Maße konstruieren meist ein Rechteck um ein Gebiet. Ihnen liegt die Annahme zugrunde, dass ein kompaktes Gebiet einem Kreis, Quadrat oder Sechseck ähnelt - diese Formen werden auch gut bewertet. Sie sind sehr einfach zu berechnen, und erfassen die wichtigsten Elemente der Streuung. Ihr Nachteil ist, dass sie sehr von einzelnen Extrempunkten abhängig sind: Ein ansonsten kompaktes Gebiet mit nur einem abstehenden Finger bekommt einen schlechten Wert.

Die Gruppe der Länge zu Breite-Maße gliedern sich bei Niemi et al. in solche, die das Verhältnis Breite zu Länge oder die Differenz zwischen Länge und Breite berechnen. [Niemi et al.]

Young stellt zwei Varianten vor, beide konstruieren zu einer Form ein umschreibendes Rechteck, welches die Form an allen vier Seiten berührt: bei Variante 1 entsteht der Kompaktheitswert durch das maximale Verhältnis Länge zu Breite; Bei Variante 2 (nach Papayanopoulos) entsteht der Kompaktheitswert durch die maximale Differenz zwischen Länge und Breite, sie wird weder bei Niemi et al. noch bei Horn et al. geführt.

3.1.1.1 Variante 1 (Young 1988):

$$Dis_{\text{young}} = \max \frac{L}{B}$$

Niedrigere Werte signalisieren bei diesem Maß höhere Kompaktheit. Da es auf dem Verhältnis der Seiten Länge und Breite basiert und sich die Dimension herauskürzt, ist es skalenunabhängig. Eine vorgeschlagene Kompaktheitsgrenze, die Formen mit Werten

größer als 1.75 als nicht kompakt einstufen würde, ist problematisch, da es so unmöglich wäre, ein Quadrat in zwei gleichgroße konvexe Gebiete aufzuteilen, ohne dass beide den Test verfehlen.

Niemi et al. führen eine Abwandlung (Dis_3) von Variante 1, welche in Tabelle 1 geführt wird: Sie bilden den Kohrbruch. Dadurch bewegt sich der Kompaktheitswert im Intervall $[0,1]$. Das erleichtert den Vergleich mit Ergebnissen anderer Kompaktheitsmaße.

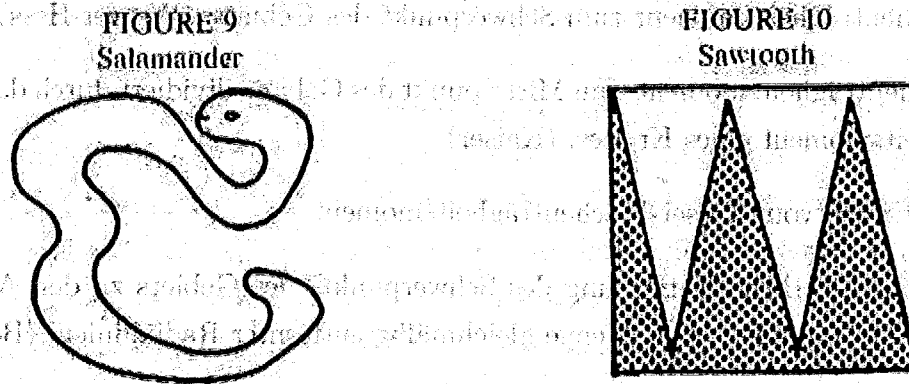


Abbildung 5: Figuren 9, 10 im Länge/Breite-Test [Young]

Young führt zwei Negativbeispiele an, in der diese Variante des Länge zu Breite-Tests falsche Auskünfte gibt: Der Salamander (Abbildung 5 Figur 9) erhält einen guten Wert, da er sich in einem begrenzten, quadratischen Gebiet „schlängelt“, in dem das Seitenverhältnis also nahezu identisch ist. Außerdem erhält die Sägezahn-Zerlegung eines Quadrats (Abbildung 5 Figur 10) in zwei gleichgroße Teile einen besseren Wert, als ein Schnitt durch die Mitte eines Quadrats, der dieses ebenfalls in gleichgroße Teile aufteilen würde.

3.1.1.2 Variante 2 (Papayanopoulos 1973):

$$Dis_{papa} = \max\{L - B\}$$

Bei diesem Maß signalisieren niedrigere Werte höhere Kompaktheit. Die Dimension kürzt sich durch die Bildung der Differenz nicht heraus.

Young kritisiert, dass das Maß von Größe abhängig, also nicht unabhängig von Skala, ist: große ländliche Gebiete haben zwingend eine kleinere Kompaktheit als kleine städtische Gebiete mit derselben Form. Dies macht „Gerrymandering“ in städtischen Gebieten einfacher als in ländlichen Gebieten und ist daher nicht fair. [Young]

3.1.2 Fläche zu Fläche

Allen Maßen, die die Fläche des Gebietes mit der Fläche einer Standardform vergleichen, liegt die Annahme zugrunde, dass ein perfekt-kompaktes Gebiet aus einer gut geformten, einfachen Form besteht, wie z.B. der Kreis, das Quadrat oder das Sechseck. Keine dieser

Formen ist in der Lage (außer der Staat ist quadratisch), einen Staat komplett in Gebiete einzuteilen, die nicht überlappend sind, insbesondere auch dann nicht, wenn das wichtige Kriterium der Bevölkerungsgleichheit erfüllt werden soll.

Im Vergleich zu den Länge zu Breite-Maßen bieten die Fläche zu Fläche-Maße eine Verbesserung, da sie weniger auf Extrempunkten beruhen. Jedoch ist der Einfluss von Extrempunkten immer noch zu hoch; Young zeigte anhand des Reock-Tests einen Defekt dieser Gruppe von Maßen: ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck (Abbildung 6 Figur 2) erhält schlechte Werte, während die Schlange (Abbildung 6 Figur 3) hohe Werte erzielt.

3.1.2.1 Reock-Test (1961)

$$Dis_7 = \frac{A_{\text{Gebiet}}}{A_{\text{Umkreis}}} \text{ wobei } A \text{ die jeweilige Fläche ist.}$$

Der Wertebereich erstreckt sich über das $[0,1]$ -Intervall. Je höher der Wert, desto kompakter ist das Gebiet. Die Dimensionen des Zählers und Nenners kürzen sich heraus, sodass der Reock-Test skalunabhängig ist. Nach dem Reock-Test sind die Form eines Sterns (Abbildung 6 Figur 3) mit einem Wert von 0.55 und die der Schlange (Abbildung 6 Figur 5) mit dem Höchstwert von 1.0 kompakt. Als nicht kompakt wird eine eigentlich intuitiv kompakte Figur, des gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks (Abbildung 6 Figur 2) mit einem Wert von 0.32 eingestuft; dieser Wert ist zu schlecht.

Young identifiziert zwei Probleme beim Reock-Test:

1. Zum einen kann einem willkürlich definierten Gebiet, wie dem der Schlange ein hoher Kompaktheitswert zugeordnet werden, solange sich das Gebiet in einer beschränkten —bspw. kreisförmigen— Fläche befindet. So ist die Form der Schlange nach dem Reock-Test sogar kompakter als das intuitiv kompakte Quadrat. Allerdings kann der Autor dieser Arbeit diese Kritik nur teilweise nachvollziehen, da seiner Meinung nach die Form einer Schlange bei einem Gebiet in der Praxis nicht auftritt, und dies somit nur ein theoretisches Problem ist. Dennoch sollte auch die Theorie eine realistische Aussage treffen und schlechte Werte anzeigen.
2. Zum anderen sieht Young in einem vorgeschlagenen Grenzwert von kleiner als 0.4, ab dem ein Gebiet als nicht kompakt angesehen wird, als problematisch an, da durch diesen Grenzwert eine Einteilung des Sechsecks (Abbildung 6 Figur 6) in drei gleichgroße Teile, drei nicht kompakte Figuren erzeugen würde. Ferner wäre die intuitiv kompakte Figur des gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks nicht kompakt. [Young]

Horn et al. fügen den Fläche zu Fläche-Maßen ein weiteres Maß hinzu und vergleichen es mit dem Reock-Test: Wählt man bei den Fläche zu Fläche-Maßen einen Kreis als Standard, gibt es zwei Varianten (Abbildung 7):

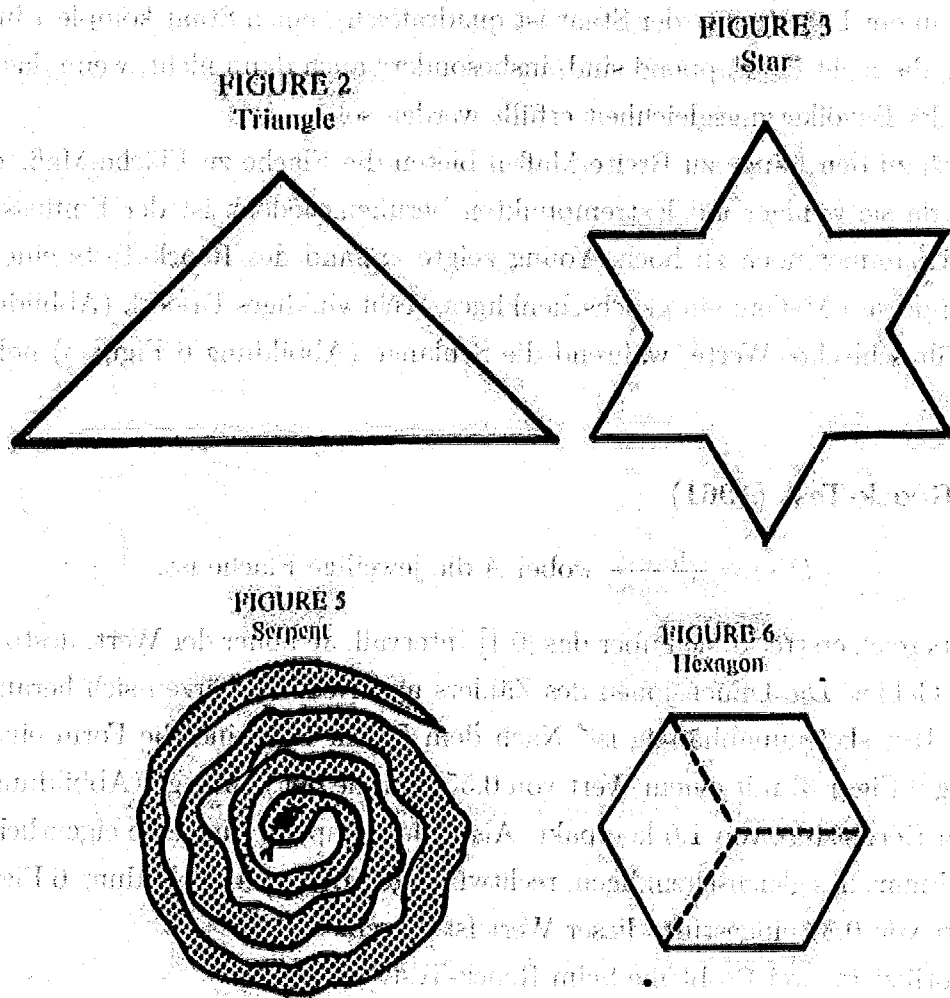


Abbildung 6: Figuren 2, 3, 5 und 6 im Reock-Test [Young]

- Variante 1: minimaler umschreibender Kreis (Reock-Test, Dis_7) um das Gebiet.
- Variante 2: Kreis um den Durchmesser des Gebiets. (Gibbs-Maß, Dis_{10})

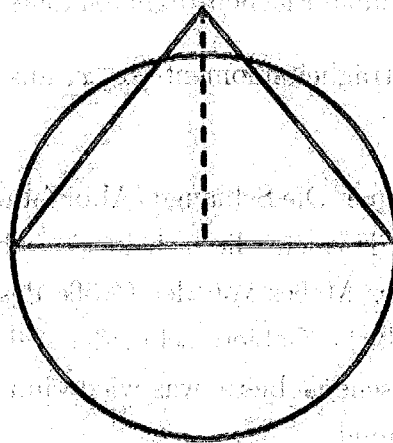
In vielen Fällen liefern Variante 1 und Variante 2 gleiche Kreise, wie bei Youngs rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck (Abbildung 6 Figur 2). Im Sonderfall des spitzwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks in Abbildung 7 sind die beiden Varianten aber verschieden: Die längste Achse ist nicht lang genug, damit ein Kreis mit diesem Durchmesser die gesamte Figur beinhaltet. In einem solchen Fall ist die abgebildete Variante 2 von Gibbs einfacher zu berechnen. Generell ist daher das Gibbs-Maß dem Reock-Test vorzuziehen. [Horn et al.]

3.1.3 Flächenträgheitsmaße

Flächenträgheitsmaße versuchen, eine Verbesserung gegenüber Länge zu Breite und Fläche zu Fläche-Maßen zu bieten, und Extrempunkte nur nach ihrer jeweiligen Häufigkeit zu

FIGURE 1

FIGURE IN WHICH CIRCLE WITH DIAMETER EQUAL TO THE FIGURE'S LONGEST AXIS IS NOT LARGE ENOUGH TO BE CIRCUMSCRIBING



$$Dis_7 = .371$$

$$Dis_{10} = .401$$

Abbildung 7: Reocks und Gibbs im Vergleich anhand eines spitzwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks. [Niemi et al.]

berücksichtigen: Zunächst werden den Punkten eines Gebiets geeignete Gewichte zugeordnet und dann alle Entfernungen zum Schwerpunkt aufsummiert. Der Kompaktheitswert einer kreisförmigen Figur, die aber einen ausgreifenden dünnen Finger besitzt, bleibt so dennoch relativ hoch. Ein Nachteil der Flächenträgheitsmomente ist aber ihre schwierigere Berechnung gegenüber den zuvor genannten Gruppen von Maßen; außerdem beseitigt auch die Verbesserung im Umgang mit Extrempunkten nicht den generellen Defekt von Streuungsmaßen, dass Formen wie die Schlange, die sich in einem begrenzten Gebiet schlängeln, hohe Kompaktheitswerte erhalten. [Niemi et al.]

3.1.3.1 Weaver-Hess-Flächenträgheitsmoment Young untersuchte das absolute Flächenträgheitsmoment von Weaver-Hess. Es kann angewendet werden, wenn eine Aufteilung eines Gebiets in sogenannte Bausteine (z.B. Kreise, Bezirke) gegeben ist. Es basiert auf der euklidische Distanz und wird folgendermaßen gebildet:

1. Bestimme für alle Bausteine (z.B. Kreise, Bezirke) des Gebiets ihr jeweiliges Zentrum.
2. Bestimme einen willkürlichen Punkt x_i im Gebiet.
3. Bilde das Flächenträgheitsmoment zum Punkt x_i durch Aufsummieren der euklidischen Distanz der Bausteine zu diesem Punkt.

4. Wiederhole Schritte 1-3 für beliebig viele Punkte x_1, \dots, x_n .
5. Bestimme das Minimum der Flächenträgheitsmomente aller Punkte x_1, \dots, x_n .
6. Der Punkt, der das minimale Flächenträgheitsmoment hat, heißt Schwerpunkt x_s .
7. Je niedriger das Flächenträgheitsmoment von x_s aus Schritt 6, desto kompakter ist das Gebiet.

Young identifiziert zwei Probleme: Die Schlange (Abbildung 6 Figur 5) erhält wieder gute Werte, wie auch alle anderen Formen, die sich in einer beschränkten Fläche befinden. Außerdem ist diese Version des Maßes von der Größe des Gebiets abhängig, also nicht skalunenabhängig: Große ländliche Gebiete schneiden — bei gleicher Form — wesentlich schlechter ab, als kleine städtische Gebiete, was wiederum in städtischen Gebieten „Gerrymandering“ begünstigt. [Young]

Allerdings gibt es auch normierte (relative) Flächenträgheitsmaße, die bei Niemi et al. und Horn et al. besprochen werden: Sie treffen teilweise sehr präzise Aussagen über Kompaktheit.

3.1.3.2 Boyce-Clark-Test Das Vorgehen beim Boyce-Clark-Test ist wie folgt:

1. Bestimme den Schwerpunkt x_s des Gebiets (s. Abschnitt 3.1.3.1 Punkte 1-6 Flächenträgheitsmoment nach Weaver-Hess) und die durchschnittliche Distanz des Schwerpunkts zu den Außenkanten des Gebiets entlang gleichmäßig entfernter strahlenförmiger Radiallinien.
2. Bestimme für jede Radiallinie die prozentuale Abweichung (positiv oder negativ) von der Durchschnittsdistanz.
3. Bilde den Durchschnitt der Abweichungen.
4. Je näher der Durchschnitt aus Schritt 3 an 0 ist, desto kompakter ist das Gebiet.

Young kritisiert, dass nach Boyce-Clark die Schlange (Abbildung 6 Figur 5) und der Salamander (Abbildung 5 Figur 9) gute Kompaktheitswerte erhalten. [Young] Außerdem werden je nach Richtung der ersten Radiallinie unterschiedliche Werte generiert. [Horn et al.] Vorteil des Maßes ist allerdings, dass es skalunenabhängig ist. [Young]

3.1.3.3 Relative Flächenträgheitsmomente Diese Maße heißen relative Flächenträgheitsmomente, weil sie das Flächenträgheitsmoment in Relation zum Flächenträgheitsmoment einer kompakten Figur setzen: Kaiser (1966) versuchte das Dimensionsproblem vom Weaver-Hess-Flächenträgheitsmoment zu lösen, indem er das Flächenträgheitsmoment des Gebiets ($= T$) durch das Flächenträgheitsmoment eines Kreises ($= A^2/2\pi$), der dieselbe Fläche wie das Gebiet hat, dividierte. Das relative Flächenträgheitsmoment ($= V$)

wird durch folgende Formel ermittelt: $V = \frac{2\pi T}{A^2}$. Höhere Werte signalisieren niedrigere Kompaktheit.

Um der Intuition zu entsprechen, also dass hohe Werte des Kompaktheitsmaßes hohe Kompaktheit signalisieren, bilden Horn et al. ein weiteres Maß: den Umkehrbruch von Kaisers Maß.

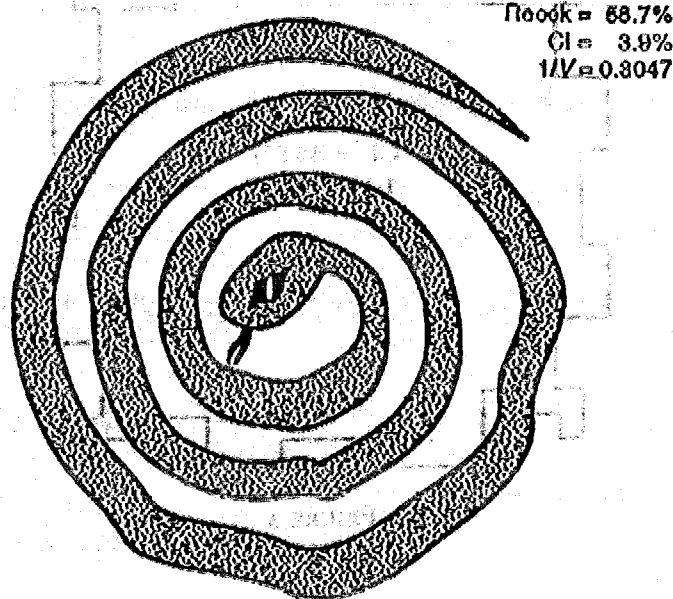


FIGURE 1. The coiled serpent (after Young, 1988).

Abbildung 8: Die in sich geschlungene Schlange [Horn et al.]

Während Manninen das relative Flächenträgheitsmoment für das beste Maß hielt, schlussfolgert Young aus seinen theoretischen Untersuchungen, dass alle Kompaktheitsmaße in irgendeiner Weise fehlerhaft sind. Seine Untersuchung beschränkte sich allerdings auf das absolute, also von Größe abhängige Weaver-Hess-Flächenträgheitsmoment (Abschnitt 3.1.3.1). Dies kritisiert er genau für diese Eigenschaft, ferner dafür, dass es der „Schlange“ gute Kompaktheitswerte gibt. In der Tat gibt das absolute Maß von Weaver-Hess einer schlangenförmigen Figur mit einer großen Stadt in ihrem Kopf niedrige – also im Kontext von Weaver-Hess gute – Kompaktheitswerte. Wendet man aber das relative Flächenträgheitsmoment (Maße V und $1/V$) auf eben diese Figur an, so erhält sie realistischere, schlechtere Werte von 0.30 bei $1/V$ bzw. 0.55 bei Blair-Bliss (Abbildung 8) [Horn et al.]. Vergleicht man diese Werte mit den Werten von Gebieten aus realen Plänen wie bspw. dem Plan für die Gebieteinteilung für die Wahlen zu Washingtons Senat, so schneidet die „Schlange“ durchweg schlechter ab, als jedes andere reale Gebiet. [Horn et al.] Dies ist positiv zu bewerten.

Niemi et al. kritisieren – wie Young – Flächenträgheitsmaße dafür, dass sie einem Gebiet, solange sie sich in einer begrenzten Form bewegen, gute Werte geben. Horn et al. stimmen hier nicht mit Niemi et al. überein: Youngs Kritik beziehe sich auf das *absolute*

Flächenträgheitsmoment von Weaver-Hess und sei nicht auf das von Niemi et al. geführte *relative* Flächenträgheitsmoment von Blair-Bliss übertragbar und sei somit falsch angewandt. Für Manninens (Abbildung 3) und Youngs Figuren (Abbildungen 10 und 11)

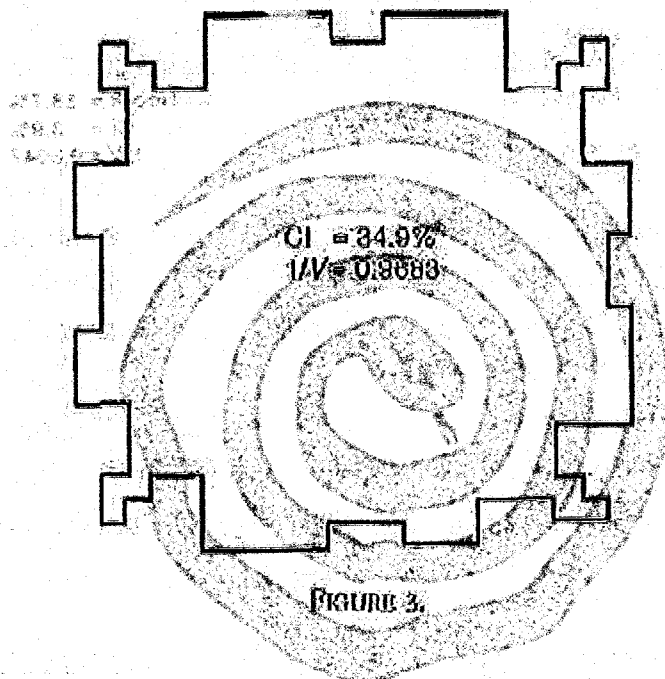


Abbildung 9: Nahezu punktsymmetrisches, ausgefranztes Quadrat [Horn et al.]

wurde das relative Flächenträgheitsmoment $1/V$ errechnet. Die berechneten Werte entsprechen der intuitiv bestimmten Kompaktheit. Der Vollständigkeit halber und weil es weder Young noch Niemi et al. gelang, ihre Kritik an Flächenträgheitsmomenten zu belegen, findet sich in Abbildung 9 der Beweis, dass auch das relative Flächenträgheitsmoment Werte liefern kann, die nicht der Intuition entsprechen: Die nahezu punktsymmetrische, ausgefranzte Figur hat einen $1/V$ -Wert von 0.97. Dieser Wert ist ein wenig besser als der $1/V$ -Wert eines intuitiv kompakten Quadrats (0.96). Deshalb stimmen Horn et al. Niemi et al. darin zu, dass kein Kompaktheitsmaß perfekt ist. Sie fügen allerdings hinzu, dass das relative Flächenträgheitsmoment dem perfekten Kompaktheitsmaß schon sehr nahe kommt und dass der Streit darüber, ob ein theoretisch perfektes Kompaktheitsmaß existiert, praxisfern ist.

3.2 Umfangsmaße

Bei den Umfangsmaßen (Tabelle 2) gibt es zwei Untergruppen: eine Gruppe, die die Gebietsumfänge eines Plans aufaddiert, und die andere Gruppe, die den Umfang und Fläche (Umfang zu Fläche-Maße) mit einem Kreis vergleichen.

Tabelle 2: UmfangsmaÙe [nach Niemi et al.]

Umfang allein

Per_1 - Summe der Gebietsumfänge (Wells 1982)

Umfang zu Fläche Vergleiche

Per_2 - Verhältnis der Gebietsfläche zur Fläche eines Kreises mit gleichem Umfang. (Cox 1927). $Per_2 = \frac{4\pi A}{P^2}$ wobei P die Länge des Umfangs und A die Fläche ist.

$Per_3 = 1 - \sqrt{Per_2}$

Per_4 - Verhältnis des Gebietsumfangs zum Umfang eines Kreises mit gleicher Fläche (Schwartzberg 1966). $Per_4 = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}} = \frac{1}{\sqrt{Per_2}}$

Per_5 - Umfang eines Gebiets als Prozentsatz des minimalen Umfangs, der die Fläche umschließt. $Per_5 = 100 \cdot Per_4 = \frac{100}{\sqrt{Per_2}}$

CI - Gebietsfläche als Prozentsatz einer Kreisfläche gleichen Umfangs: $400\pi A/P^2$. (Compactness Index, Goedicke)

3.2.1 Summe der Gebietsumfänge

Der Umfangstest summiert die Umkreise aller Gebiete eines Gebietsplans. Je kleiner diese Summe, desto kompakter ist der gesamte Plan. Niemi et al. wie Horn et al. ordnen den Test als Per_1 unter den Umfangsmaßen ein.

Der Unterschied dieses Tests zu den bisher sieben anderen von Young vorgestellten besteht darin, dass sich der Umfangstest anstatt auf einzelne Gebiete auf einen gesamten Gebietsplan bezieht. Neben schwierigen Berechnungen sieht Young auch Probleme in der

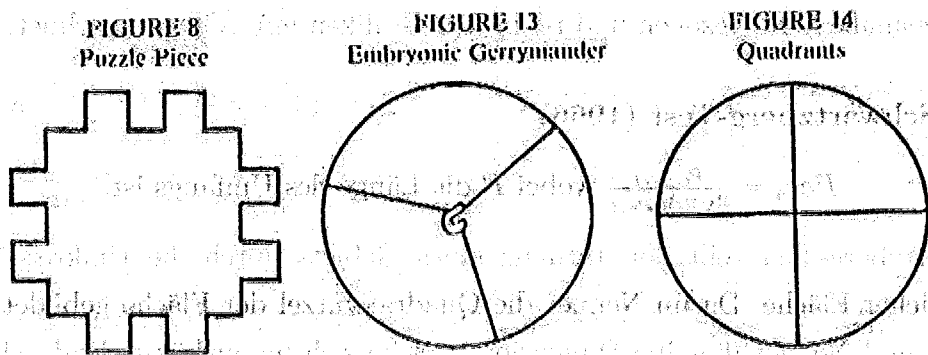


Abbildung 10: Figuren 8, 13 und 14 im Umfangstest [Young]

Theorie:

- Das Maß bestrafte lange Umfänge. Jedoch kann man anhand des Puzzleteils zeigen, dass lange Umfänge nicht notwendigerweise bedeuten, dass ein Gebiet nicht kompakt ist (Abbildung 10 Figur 8).
- Ferner kann die Verwendung dieses Maßes „Gerrymandering“ ermöglichen: Durch minimale Manipulation von ländlichen Gebietsgrenzen können schlechtgeformte städtische Gebiete wie in Figur 13 (Abbildung 10) durchschlüpfen. So schneidet Figur 13 im Umfangstest sogar besser ab als Figur 14 (Abbildung 10). [Young]

Niemi et al. finden das Maß attraktiv wegen seiner unschlagbaren Einfachheit und guten Interpretierbarkeit. Deshalb wurde es sogar in die Verfassung des US-Bundesstaates Colorado aufgenommen. Sein Nachteil ist, dass es von der absoluten Größe der Gebiete abhängt, also von Skala abhängig ist. [Niemi et al.]

3.2.2 Umfang zu Fläche

Umfang zu Fläche-Maße basieren auf der Tatsache, dass das Verhältnis Umfang zu Fläche für den Kreis am kleinsten ist. Es gibt in dieser Gruppe mehrere Maße, die aber entweder faktisch identisch, oder gegenseitige Transformationen sind: Wie man der Tabelle 2 entnehmen kann, ist auch der in Abschnitt 3.2.2.1 behandelte Schwartzberg-Test (Per_4) eine bloße Transformation des Cox-Maßes (Per_2). Niemi et al. identifizieren Per_2 als wichtigstes Maß in der Gruppe der Umfang zu Fläche-Maße. Es ist von Skala unabhängig und seine Werte befinden sich im $[0,1]$ -Intervall wobei der Kompaktheitswert von 0 einer geraden Linie und der Wert von 1 einem Kreis entspricht.

Eine Modifikation vom Cox-Maß ist der sogenannte „Compactness Index“ (CI), der vom Mathematik-Professor Victor Goedicke der Universität von Ohio entwickelt wurde: Durch Multiplikation des Cox-Maß mit 100 erhält man Prozentwerte; ein Wert von 100 entspricht dem Kreis. Dieses Maß wird von Horn et al. für ihre Untersuchungen als Stellvertreter der Umfangsmaße herangezogen und ist in den Grafiken mit „CI“ verzeichnet.

3.2.2.1 Schwartzberg-Test (1966)

$$Per_4 = \frac{P_{\text{Gebiet}}}{2\sqrt{\pi A_{\text{Gebiet}}}} \quad \text{wobei } P \text{ die Länge des Umfangs ist.}$$

Der Schwartzberg-Test teilt den Umfang eines Gebiets durch die Umkreislänge eines Kreises gleicher Fläche. Da im Nenner die Quadratwurzel der Fläche gebildet wird, haben Zähler und Nenner dieselbe Dimension, welche sich herauskürzt. Dadurch wird der Schwartzberg-Test skalenunabhängig. In der politischen Gebietsplanung wird der Umfang des Gebiets durch einen sogenannten „angepassten“ Umfang beschrieben, der durch die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte von jeweils drei oder mehr Subgebieten mit der Außengrenze des Gebiets entsteht. Nach dem Schwartzberg-Test sind der Ellbogen (Abbildung 11 Figur 1) mit einem Wert von 1.3 und der Winkel (Figur 7) mit einem Wert von 1.2 kompakte Figuren. Als nicht kompakt werden der Stern (Figur 3) mit einem Wert von

FIGURE 7
Dog-leg

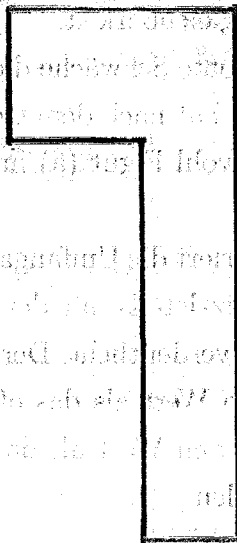


FIGURE 8
Puzzle Piece

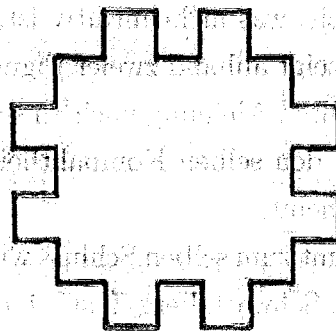


FIGURE 3
Star

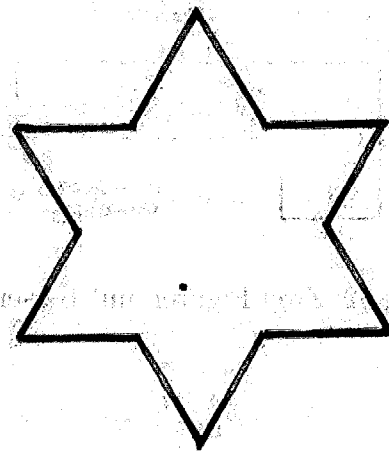


FIGURE 1
Elbow

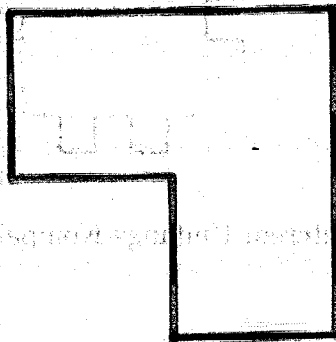


Abbildung 11: Figuren 1, 3, 7 und 8 im Schwartzberg-Test (Young)

1.5 und das Puzzleteil (Figur 8) mit einem Wert von 1.8 eingestuft. Auch die Schlange (Abbildung 8) ist wegen ihres langen Umfangs, der sich in einem großen Zähler des Maßes ausdrückt, eine nicht kompakte Form.

Young sieht beim Schwartzberg-Test zwei Probleme:

- Der Schwartzberg-Test legt zu viel Wert auf den Umfang. Dies führt dazu, dass eine intuitiv kompakte Form wie das Puzzleteil schlechter abschneidet, als der Winkel.
- Auch für den Schwartzberg-Test gibt es — wie beim Reock-Test — keinen Grenzwert, ab dem eine Form nicht kompakt ist. Ein vorgeschlagener Grenzwert, der Formen mit einem Wert größer als 1.67 als nicht kompakt einstuft, würde den Winkel akzeptieren, während das Puzzleteil als nicht kompakt ausscheiden würde.

Der Autor dieser Arbeit sieht beim Schwartzberg-Test einen weiteren Nachteil: Für den Schwartzberg-Test gibt es kein $[0,1]$ -Intervall, außerdem signalisieren hohe Werte niedrige Kompaktheit, was nicht intuitiv ist; hierdurch leidet die Vergleichbarkeit.

Manninen zeigt anhand zweier Figuren (Abbildung 3), die größte Schwäche dieser Klasse: Sie beruht ihrer Meinung nach zu sehr auf Umfang. Figur (a) hat nach dem Compactness Index (CI) den selben Kompaktheitswert wie Figur (b), obwohl Figur (a) intuitiv kompakter erscheint.

Young kommt zum selben Schluss wie Manninen und demonstriert die Umfangabhängigkeit anhand des Schwartzberg-Tests, indem er die Form eines Puzzleteils mit der eines Winkels vergleicht (S. 3.2.2.1). Der Vergleich ist in Abbildung 12 verdeutlicht: Der Winkel (c) bekommt nach dem Compactness Index (CI) einen besseren Wert als das offensichtlich kompaktere Puzzleteil (d). Damit der Winkel einen schlechteren Wert als das Puzzleteil erhält, muss er erst um die gestrichelte Linie verlängert werden.

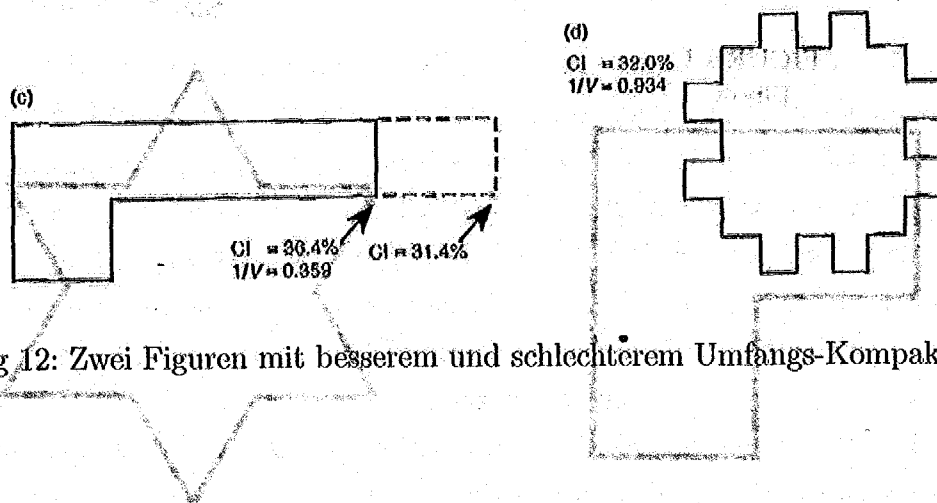


Abbildung 12: Zwei Figuren mit besserem und schlechterem Umfangs-Kompaktheitswert [Young]

3.3 Bevölkerungsmaße

Bevölkerungsmaße (Tabelle 3) ähneln den Streuungsmaßen. Sie sind die neueste Klasse von Kompaktheitsmaßen. Sie vergleichen die Bevölkerung eines Gebiets mit der Bevölkerung einer kompakten Figur wie bspw. einem minimalen umschreibenden Kreis. Die Frage, ob man einen Kreis oder irgendeine andere Figur als Vergleichsstandard benutzen sollte, treffen gleichermaßen auf Bevölkerungsmaße wie auch auf geografische Maße zu. Es wird nur ein beispielhaftes Maß aus den Klassifikationen der Literatur übernommen.

Tabelle 3: Bevölkerungsmaße [nach Niemi et al.]

Bevölkerung des Gebiets verglichen mit der Bevölkerung einer kompakten Figur

Pop_2 - Verhältnis der Bevölkerung des Gebiets verglichen mit der Bevölkerung des minimalen umschreibenden Kreises (Hoffeler 1990).

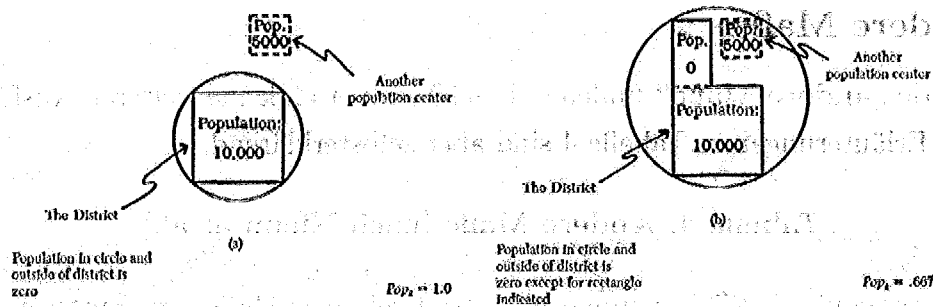


Abbildung 13: Gebiet, bei dem der Anschluss eines nicht bevölkerten Gebiets das Maß Pop_2 verschlechtert [Niemi et al.]

Die Verwendung von Bevölkerungsmaßen ist problematisch:

- Sie können schon in einfachen Fällen zu fehlerhaften Ergebnissen führen: wie in Abbildung 13 gezeigt, kann sich durch den Anschluss eines nicht bevölkerten Gebiets an das Hauptgebiet der Kompaktheitswert verschlechtern. Denn durch die Verknüpfung der beiden Gebiete vergrößert sich der minimale umschreibende Kreis: So fällt ein entferntes Gebiet (gestrichelt dargestellt) jetzt in den Kreis und die Gesamtbevölkerung im Kreis vergrößert sich. Dadurch verschlechtert sich der Kompaktheitswert erheblich gegenüber der Ausgangslage vor dem Anschluss (Figur a), obwohl die Bevölkerung des Hauptgebiets unverändert bleibt (Figur b).
 - Die Berechnung von Bevölkerungsmaßen ist schwieriger, als bei Streuungs- und Umfangsmaßen: bspw. sind Flächenträgheitsmaße der Bevölkerung durch Hinzunahme von Gewichten weniger intuitiv als ihr ungewichtetes Pendant bei den Streuungsmaßen. Horn et al. äußern Bedenken, dass sich die Bestimmung der Bevölkerung im minimalen umschreibenden Kreis als äußerst schwierig herausstellen könnte: Volkszählungen finden in Blöcken statt, die häufig nicht vollständig im Kreis liegen. [Horn et al.]
 - Die Bevölkerung eines Gebiets ist zwar meist verfügbar, aber die Berechnung der Bevölkerung im umschreibenden Kreis gestaltet sich aufwändig.
 - Bevölkerungsmaße sind nicht intuitiv und verletzen die Vorstellung von räumlicher Kompaktheit.
- [Niemi et al.]

3.4 Andere Maße

Zur Kategorie „andere Maße“ finden sich bei Niemi et al. keine weiteren Ausführungen. Die kurzen Erläuterungen in Tabelle 4 sind aber selbsterklärend.

Tabelle 4: Andere Maße [nach Niemi et al.]

1. Papayanopoulos (1973): Summe aller paarweisen euklidischen Entfernungen zwischen den Mittelpunkten der Gebietsbausteine, gewichtet mit ihrer jeweiligen Bevölkerung.
2. Taylor-Test (1973): $cp_{Taylor} = \frac{N-R}{N+R}$ wobei N der Anzahl von nicht reflexiven Innenwinkeln und R der Anzahl von reflexiven Innenwinkeln entspricht.

3.4.1 Maß von Papayanopoulos (1973)

Das absolute Maß von Papayanopoulos dient als Grundlage für das Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß $Dis_{punkt1,abs}$ (Abschnitt 5.2.1). „Paarweise Entfernungen“ bedeutet, dass für alle Bausteine jeweils von ihrem Mittelpunkt die euklidische Distanz zu den Mittelpunkten aller anderen Bausteine bestimmt wird. Anschließend wird aus diesen Distanzen die Summe gebildet.

3.4.2 Taylor-Test (1973)

$$cp_{Taylor} = \frac{N - R}{N + R}$$

Der Taylor-Test konstruiert den Umfang eines Gebiets, indem die Schnittpunkte von drei oder mehr Subgebieten mit der äußeren Gebietsgrenze mit geraden Linien miteinander verbunden werden. Der Innenwinkel, der an den Schnittpunkten entsteht, ist:

- „reflexiv“ (=R), wenn er vom Gebiet wegzeigt und
- „nicht reflexiv“ (=N), wenn er zum Gebiet hinzeigt.

Die Kompaktheit wird folgendermaßen bestimmt: Die Anzahl der „nicht reflexiven“ Winkel wird von der Anzahl der „reflexiven“ Winkel subtrahiert und durch die Gesamtzahl aller Winkel geteilt. Der Taylor-Test ist dimensionslos, der Kompaktheitswert liegt in einem [0,1]-Intervall, je näher er an 1 liegt, desto kompakter ist die Form. Da der Test weder den Streuungs- noch Umfangsmaßen zugeordnet werden kann, führen ihn Niemi et al. unter „andere Maße“ und Horn et al. unter „Winkelmaße“. Kompakte Formen nach dem Taylor-Test sind die intuitiv kompakte Form des Dreiecks (Abbildung 14 Figur 2) und die intuitiv nicht kompakte Form des langgezogenen Strichs (Abbildung 14 Figur 12). Beide haben einen Wert von 1,0. Als nicht kompakt eingestuft werden die Figur des Sterns (Abbildung 14 Figur 3) und die des gequetschten Quadrats (Abbildung 14 Figur

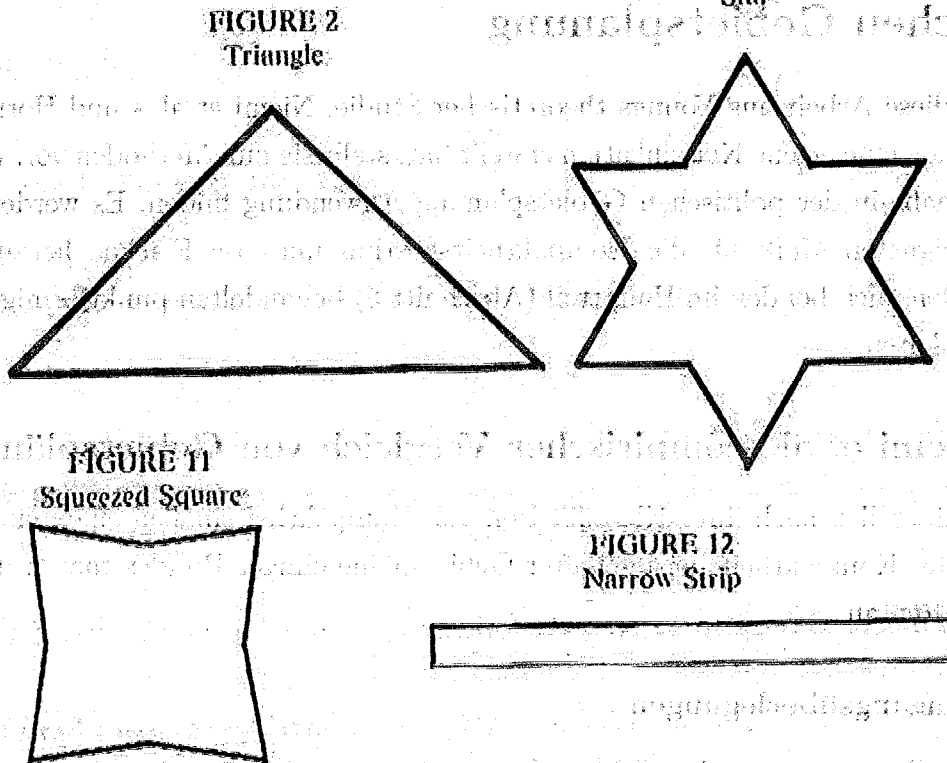


Abbildung 14: Figuren 2, 3, 11 und 12 Taylor-Test

11), beide mit einem Wert von 0. Es ist offensichtlich, dass es sich beim Taylor-Test um ein fehlerhaftes Maß handelt. [Young]

Schon kurz nach seiner Veröffentlichung zeigte Beth einen Defekt des Eindruck-Maß von Taylor auf, was Taylor dazu zwang, es zu modifizieren. Youngs Kritik an Taylors Maß trifft aber auch auf diese verbesserte Version zu. [Horn et al.]

4 Anwendung von Kompaktheitsmaßen in der politischen Gebietsplanung

Nachdem diese Arbeit aus Youngs theoretischer Studie, Niemi et al.'s und Horn et. al.'s Klassifikation eine eigene Klassifikation erstellt hat, stellt sie nun Methoden vor, wie Kompaktheitsmaße in der politischen Gebietsplanung Anwendung finden. Es werden die am besten geeigneten Maße für die Kompaktheitsbestimmung von Flächen herausgestellt. Diese werden auch bei den im Hauptteil (Abschnitt 5) behandelten punktförmigen Basisgebiete hinleiten.

4.1 Niemi et al.'s empirischer Vergleich von Gebietsplänen

Niemi et al. stellen nach ihrer Klassifikation von Kompaktheitsmaßen einen empirischen Vergleich der Kompaktheit beispielhafter Gebietspläne einiger Bundesstaaten der Vereinigten Staaten an.

4.1.1 Eingangstüberlegungen

Bei Untersuchungen von realen Gebietsplänen sollte man sich zunächst überlegen, welche Arten von Vergleichen man überhaupt anstellen kann.

Unterschiede zwischen mehreren Bundesstaaten sind schon aufgrund ihrer unterschiedlichen Ausgangsformen unvermeidlich: Rechteckige Staaten haben höhere Kompaktheitswerte als solche mit einer irregulären Form. Staaten mit langen Ufer- und Küstenlinien haben geringere Kompaktheitswerte bei den Umfangsmaßen. Dieses Problem lässt sich aber einfach lösen, indem man die Untersuchungen *auf einen Staat beschränkt*.

Ein weiterer Umstand, den man berücksichtigen muss, ist, *dass Umfangsmaße konstant höhere Werte aufweisen als Streuungsmaße*. Ferner gibt es auch zwischen Streuungsmaßen Unterschiede in der Höhe der Kompaktheitswerte. Die Höhe des Wertes ist allerdings weniger entscheidend als der Grad, zu dem die verschiedenen Kompaktheitsmaßen dieselbe Kompaktheitsrangfolge der Gebiete eines Plans erzeugen.

4.1.2 Empirische Untersuchungen der Kompaktheit in realen Gebietsplänen

Die Untersuchung erstreckt sich über

- Gebietspläne für Wahlbezirke zum US-Kongress (Untersuchungen von Colorado, New York, Kalifornien),
- Gebietspläne für Wahlbezirke zum jeweiligen Staatsparlament (Untersuchungen von Rhode Island, Indiana),
- Staaten mit deutlich verschiedener Geografie,

- Staaten mit Einparteien-Herrschaft und
- Staaten mit wechselnden Regierungen,
- Staaten, in denen ausgeprägtes „Gerrymandering“ betrieben wurde (Untersuchungen von Kalifornien, Indiana).

Kompaktheitsvergleiche werden —je nach Verfügbarkeit der Daten— jeweils zwischen Plänen derselben Zeitperiode, oder zwischen Plänen der 1970er und 1980er Jahre ange stellt.

1. **Rhode Island** In diesem Vergleich zeigt sich die Übereinstimmung der beiden Umfangsmaße Per_1 und Per_2 in der Bewertung der zwei verglichenen Pläne: ein Plan wird von beiden Maßen als der kompaktere identifiziert.

2. **New York** Durch Hinzunahme des Gibbs-Streuungsmaßes Dis_{10} kann gezeigt werden, dass bei der Bewertung einzelner Gebiete eines Plans Divergenzen auftreten, anhand derer man auf die Art der Nichtkompaktheit schließen kann. Ein Gebiet mit der Form einer langen längsten Achse und einer sehr großen Fläche schneidet nach dem Streuungsmaß relativ gut ab aber im Umfangsmaß Per_2 deutlich schlechter.

Die umgekehrte Situation stellt sich bei einem anderen Gebiet dar: Durch eine gerade Grenzlinie erhält dieses einen guten Wert in Per_2 , durch die längliche, dünne Form schneidet es aber in Dis_{10} schlecht ab.

3. **Indiana** Hier wird das Länge zu Breite-Streuungsmaß Dis_4 zu den bisherigen hinzugefügt. Es zeigen sich bei Betrachtung eines Gebiets, das die Form eines angebissenen Quadrates hat, Unterschiede bei den Streuungsmaßen. Im Länge zu Breite-Streuungsmaß schneidet das Gebiet sehr gut ab, während es im anderen Streuungsmaß, Dis_{10} , einen realistischeren, schlechteren Wert erhält. Dies offenbart eine große Schwäche aller Länge zu Breite-Maße.

4. **Colorado** Die verglichenen Pläne haben alle eine gemeinsame Eigenschaft: Sie enthalten nur sehr wenige Gebiete. Dies ist problematisch, denn ein nicht kompaktes Gebiet hat sehr hohe Auswirkungen auf die durchschnittliche Kompaktheit eines Plans. Der Vergleich von Kompaktheitswerten einzelner Gebiete zeigt an, dass Länge zu Breite-Maße konstant höhere Werte generieren, als andere Maße, was der starken Abhängigkeit von Extrempunkten zuzuschreiben ist. Da insgesamt mit 17 sehr viele Pläne verglichen werden, wird die Bedeutung von Kompaktheitsmaßen allgemein deutlich: Sie können entweder aussagen, welcher Plan der kompaktste ist, oder aber, dass kein kompaktster Plan identifiziert werden kann.

5. **Kalifornien** Allgemeine Vergleiche zeigen, dass Bevölkerungsmaße und Länge zu Breite-Maße tendenziell höhere Werte als alle anderen Maße generieren.

4.1.3 Diskussion

Die theoretische Analyse zeigte, dass Kompaktheit mehrere Komponenten — nämlich Umfang und Streuung — hat und dass kein Kompaktheitsmaß beide Komponenten adäquat erfasst. Die empirische Analyse zeigt, dass sich die wichtigsten Kompaktheitsmaße manchmal sehr stark in der Bewertung der Kompaktheit eines gegebenen Gebiets unterscheiden, aber auch, dass einige Maße ganze Gebietspläne gleich einstufen: Es zeigten sich die Stärken und Schwächen von einzelnen Maßen sowie Unterschiede zwischen Theorie und Praxis.

Wie sollte Kompaktheit als Kriterium in einer Gebietsplanungsprozedur verwendet werden? Niemi et al. schlagen vier Richtlinien vor:

1. Vergleiche sollten fast immer auf einen Staat oder Bereich beschränkt werden. Wegen unterschiedlicher Ausgangsformen, bspw. erzeugt durch Flüsse, Küsten oder andere natürliche Grenzen, können Maryland und Montana, Wisconsin und Wyoming, New York und Nebraska keine vergleichbaren Kompaktheitsergebnisse erzielen.
2. Aus demselben Grund sollten quantitative Maße nur dazu benutzt werden, relative Vergleiche anzustellen, anstatt nicht kompakte Gebiete anhand eines willkürlichen Grenzwertes zu eliminieren. Der Fakt, dass Kompaktheit ein relatives Maß ist, macht es aber nicht bedeutungslos: Solche Konzepte sind alltäglich, bspw. bei der Temperaturmessung: Eine Temperatur von -10°C wird gemeinhin als kalt und eine Temperatur von 30°C als heiß angesehen.
3. Kompaktheit sollte als eines unter mehreren Gebietsplanungskriterien nach Bevölkerungsgleichheit und Rassenfairness dienen. Noch wichtiger ist, dass man nicht mechanisch den Plan mit der größten Kompaktheit wählen sollte. Schlecht kompakte Gebiete sind „ein Signal, dass möglicherweise etwas schiefgelaufen ist“ und müssen begründet werden. Das bedeutet aber nicht, dass neu geplant werden muss. Manchmal ist die Begründung für niedrige Kompaktheit sehr einfach: Flüsse oder andere natürliche Grenzen können die Form eines Gebiets negativ beeinflussen. In anderen Fällen könnte Kompaktheit Streit verursachen, in etwa, wenn es darum geht, Städte oder Gemeinden aufzutrennen, um größere Kompaktheit zu erzielen. Der springende Punkt ist aber, dass größere Kompaktheit allein einen Plan noch nicht gut macht.
4. Es sollten, wo immer möglich, mehrere Maße verwendet werden: Streuung der Fläche, Länge des Umfangs und Streuung der Bevölkerung sind nicht substituierbar. Wenn mehrere Maße zusammen einen einzelnen Plan unterstützen, ist die Beweiskraft für

seine Auswahl sehr stark. Die empirische Analyse lässt vermuten, dass diese Situation häufig auftritt, vor allem, wenn die Anzahl der Pläne schon auf zwei oder drei eingengt wurde. Falls die Bewertung nicht komplett eindeutig ist, ist es trotzdem sehr wahrscheinlich, dass einige Pläne als besonders kompakt oder nicht kompakt identifiziert werden können.

Natürlich gibt es auch Fälle, in denen —aufgrund der Verwendung mehrerer Maße— kein Plan der kompakteste ist. Dies jedoch ist auch Teil des Konzepts von Kompaktheit und kein Defekt der Maße an sich: Verhalten sich mehrere Maße ambivalent, zeigt dies an, dass kein Gebiet bzw. Plan alle Eigenschaften von Kompaktheit komplett erfüllt.

Die Frage, welches Maß verwendet werden sollte, kann nicht abschließend beantwortet werden, jedoch konnten hierbei wichtige Fortschritte gemacht werden:

- Die Anzahl der in Frage kommenden Maße konnte eingengt werden dadurch, dass die Maße, die nur Transformationen von anderen sind, identifiziert wurden.
- Normalisierte Maße sollten denen, die von Größe abhängig sind, vorgezogen werden.
- Um Interpretationen zu vereinfachen, sollten alle Maße auf ein $[0,1]$ -Intervall gebracht werden.
- Es wurde beobachtet, dass Länge zu Breite-Maße konstant höhere Werte als andere Streuungsmaße haben.
- In den meisten Fällen verhalten sich das Gibbs-Maß (Dis_{10}) und der Reock-Test (Dis_7) äquivalent.

Diese Forderungen bzw. Beobachtungen lassen aber immer noch mehrere Maße jeder Klasse übrig: Bei den Streuungsmaßen der Reock-Test Dis_7 und das Gibbs-Maß (Dis_{10}) und bei den Umfangsmaßen der Umfangstest Per_1 und das Cox-Maß Per_2 . Obwohl die Maße einer Klasse relativ gleich sind, gibt es auch Fälle, in denen sie Gebiete oder ganze Pläne unterschiedlich bewerten.

4.1.4 Schlussfolgerung

Young schlägt fünf „wünschenswerte Prinzipien“ im Umgang mit Kompaktheitsmaßen vor:

1. Man sollte sich nicht auf einen Grenzwert im Umgang mit Kompaktheitsmaßen verlassen. Eine Aussage über die Kompaktheit lässt sich nur im Zuge eines Vergleichs von gesamten Plänen und nicht von einzelnen Gebieten treffen.
2. Ein Kompaktheitsmaß sollte auch eine Aussage über den gesamten Gebietsplan treffen, denn in einem zerklüfteten Staat wie Maryland sind notwendigerweise auch

nicht kompakte Gebiete vorhanden, was nicht zwangsweise heißen muss, dass die restlichen Gebiete nicht kompakt sind. Hingegen könnte ein Kompaktheitsmaß — wie der Umfangstest —, das sich ausschließlich auf den gesamten Plan bezieht, massives „Gerrymandering“ in einigen wenigen Gebieten ermöglichen.

3. Feste politische Einheiten oder Gemeinden sollten als unzerstrennliche Bausteine behandelt werden, unabhängig von ihrer Form. Das Flächenträgheitsmoment von Weaver-Hess erfüllt diese Forderung, da es die Entfernung der Bausteine zu einem Schwerpunkt misst, aber auch der Schwartzberg-Test berücksichtigt solche Bausteine.
4. Ein Kompaktheitsmaß sollte nur die Form messen, also unabhängig von Skala sein und nicht zwischen städtischen und ländlichen Gebieten unterscheiden. Schwartzberg, das Flächenträgheitsmoment von Weaver-Hess und Variante 2 des Länge zu Breite-Tests scheiden hier — wie gezeigt — aus, während der Reock-Test, Variante 1 des Länge zu Breite-Tests, der Boyce-Clark-Test und der Taylor-Test diese Anforderung erfüllen.
5. Ein Kompaktheitsmaß sollte konzeptuell einfach sein, also sich nur auf verfügbare und leicht zu verifizierenden Daten stützen.

Gerichte sehen Bevölkerungsgleichheit der Gebiete als wichtigstes Kriterium für die Gerechtigkeit von Gebietsplänen an — Kompaktheit wird als nachrangig betrachtet, was auch daran liegt, dass es bislang keinen mathematischen Standard gab. Deshalb gab es Bemühungen, solche Standards zu finden. Das Ziel aber, Pläne mit gleichzeitiger Kompaktheit und ausgeglichener Bevölkerungsdichte zu erstellen, ist in der Realität nicht zu erzielen: Es scheitert daran, dass Kompaktheit ein relatives Maß ist, und kein Grenzwert existiert, ab dem man eine Einteilung in „kompakt“ oder „nicht kompakt“ treffen kann. Um das Konzept von Kompaktheit dennoch mit einfließen zu lassen, schlägt Young vor, Kompaktheitsmaße dann anzuwenden, wenn es einen noch kompakteren Gebietsplan gibt, der bereits das Kriterium der ausgeglichenen Bevölkerung erfüllt, bzw. dessen Abweichung von der idealen Bevölkerung maximal ein Prozent betragen darf.

Young plädiert — wegen der oben aufgeführten Schwächen jedes mathematischen Standards — dafür, Kompaktheit nur gemäß der lexikalischen Definition zu verwenden, anstatt auf Formeln zu vertrauen.

5 Kompaktheitsmessung punktförmiger Basisgebiete

Nach der Vorstellung von Kompaktheitsmaßen für Flächen und deren Einsatz für die politische Gebietsplanung wird die Übertragung auf die Messung der Kompaktheit von punktförmigen Basisgebieten geprüft. Ein Punkt entspricht einem Basisgebiet. Mehrere Basisgebiete entsprechen einer Ausgangsmenge $V \in \mathbb{R}^2$. Sie treten in der Gebietsplanung bei der Einteilung von Verkaufsgebieten („Sales Territory Design“) auf.

Das „Sales Territory Design“ beschäftigt sich damit, wie kleinere geografische Einheiten (Basisgebiete) zu größeren Clustern (Verkaufsgebiete) —unter Berücksichtigung relevanter Planungskriterien wie Balance, Kompaktheit, Nachbarschaft und Verbundenheit— zusammengefasst werden.

Jedes Basisgebiet enthält einen Punkt (bspw. einen Einzelkunden oder eine Kundenadresse). Ein Gebiet enthält (meist mehrere) Basisgebiete der Ausgangsmenge V . Ein Gebiet, das eine Untermenge der Ausgangsmenge V ist, besteht aus einer Punktmenge $P \in \mathbb{R}^2$. Typische Anwendungsgebiete in der Praxis der Gebietsplanung sind bspw. die Planung des Außendienstes sowie die Tourenplanung von Paketdiensten. Nur ungefähr die Hälfte der bekanntesten Problemstellungen berücksichtigen Kompaktheit (als Lösung wird jeweils eine Gebietsenteilung in Form von Punktmenge, die Untermengen von $P \in \mathbb{R}^2$ sind, ausgegeben):

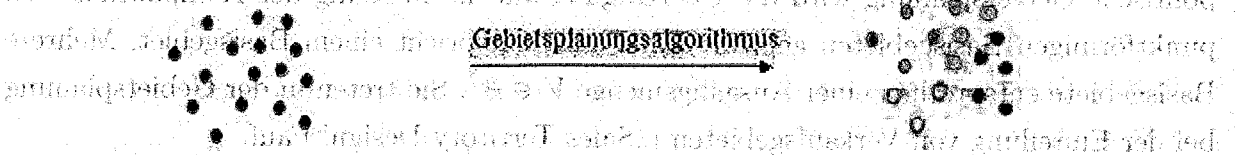
- das Schulbus-Routing-Problem von Bowerman et al. (2005) schlägt eine Heuristik vor, die die Schüler in Cluster gruppiert; anschließend werden für jeden Cluster eine Schulbusroute und Busstops generiert (Traveling Salesman Prozedur). Der Gebietsplanungsalgorithmus hat vier Ziele: Anzahl der Routen minimieren, die Länge der Routen minimieren, Auslastung balancieren und Kompaktheit. Die letzten drei Ziele werden in der Zielfunktion platziert.
- das Gebietsaufteilungs- und Aggregationsmodell „MOZART“ von Guo et al. (2000) ist die Integration einer Graph-Einteilungs-Engine mit einem geografischen Informationssystem (GIS) durch ein grafisches Benutzerinterface. Guo et al. demonstrieren die Performance von „MOZART“ indem sie zwei Zonierungsprobleme von drei Regierungsbezirken lösen. Der erste Teil ihrer experimentellen Arbeit besteht aus dem einzigen Ziel, Bevölkerungsgleichheit herzustellen. Im zweiten Teil werden gleichzeitig Kompaktheit und Bevölkerungsgleichheit als Zielfunktionen benutzt. Die Hinzunahme von Kompaktheit führt zu Zonen besserer Form.
- das politische Gebietsplanungsproblem von Ricca und Simeone (2008) behandelt ein mehrkriterielles politisches Gebietsplanungsproblem. Kriterien sind Konnektivität, Bevölkerungsgleichheit, Kompaktheit und Konformität mit administrativen Grenzen und werden in eine konvexe Zielfunktion übernommen.

Gebietsplanung

Ausgangs-Punktmenge V

4 Gebiete jev. der Punktmenge P

Gebietsplanungsalgorithmus



Ideen

Kapitel 5.1, 5.2

wende auf Punkte aus P
Punkt-Kompaktheitsmaße an

Kapitel 5.3

forme aus Punkten aus V
eine Fläche

Kapitel 5.4

forme aus Punkten aus P
eine Fläche

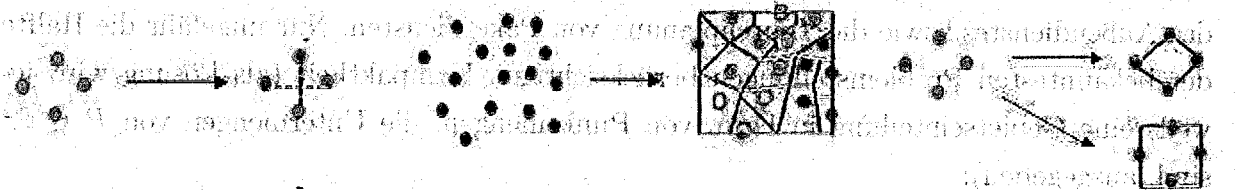


Abbildung 15: Vorgehensweise bei der Kompaktheitsmessung von Punkt-mengen

Ausgehend von einer Lösung eines Gebietsplanungsproblems ist es von Interesse, die Kompaktheit der erzeugten Punkt-mengen zu messen. Hierfür gibt es drei Ansätze, die im Folgenden besprochen werden:

1. man misst die Kompaktheit der ausgegebenen Gebietseinteilungen mittels Kompaktheitsmaßen für Punkte (Abschnitte 5.1, 5.2),
2. man formt, ausgehend von einer Ausgangsmenge V , aus den Einzelpunkten Flächen, setzt diese — der Lösung des Gebietsplanungsproblems entsprechend — zusammen und misst die Kompaktheit mit den in Abschnitt 3 vorgestellten Kompaktheitsmaßen für Flächen (Abschnitt 5.3),
3. man betrachtet, ausgehend von einer Gebietseinteilung, mehrere Punkte einer Punktmenge P zusammen, formt daraus eine Fläche und misst deren Kompaktheit mit den Kompaktheitsmaßen für Flächen (Abschnitt 5.4).

5.1 Punkt-Kompaktheitsmaße mit l_2 -Metrik

Alle in diesem Abschnitt besprochenen Punkt-Kompaktheitsmaße basieren auf der euklidischen Distanz (auch l_2 -Metrik) zweier Punkte:

als Abstand bei $l_2 = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ mit $x, y \in P$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Es wurden vier Kompaktheitsmaße entwickelt. Sie werden im Folgenden behandelt. Die vorgestellten Punkt-Kompaktheitsmaße messen Streuung. Höhere Kompaktheit minimiert die Streuung. Bei den absoluten Maßen signalisieren höhere Werte niedrigere Kompaktheit, bei den normierten Maßen, die vom Autor entwickelt wurden, verhält es sich umgekehrt.

Berechnungen wurden durchgeführt für die Beispielfiguren von Young, Manninen, Niemi et al. und Horn et al. untersuchten Figuren betrachtet. Sie wurden mit doppelter Größe skaliert. Anschließend wurden der Intuition nach Punkte auf die Figuren gelegt: Bei den meisten Figuren wurde der Umfang mit Punkten belegt. Außerdem wurde der Kreis als die kompakteste Figur in drei verschiedenen Varianten (100 und 50 Prozent der Ausgangsgröße und mehr Punkte, Abbildung 16) in die Kompaktheitsberechnungen miteinbezogen. Anhand des Kreises soll für ein und dieselbe Figur untersucht werden, wie Skalierung und die Anzahl der Punkte den Kompaktheitswert beeinflusst.

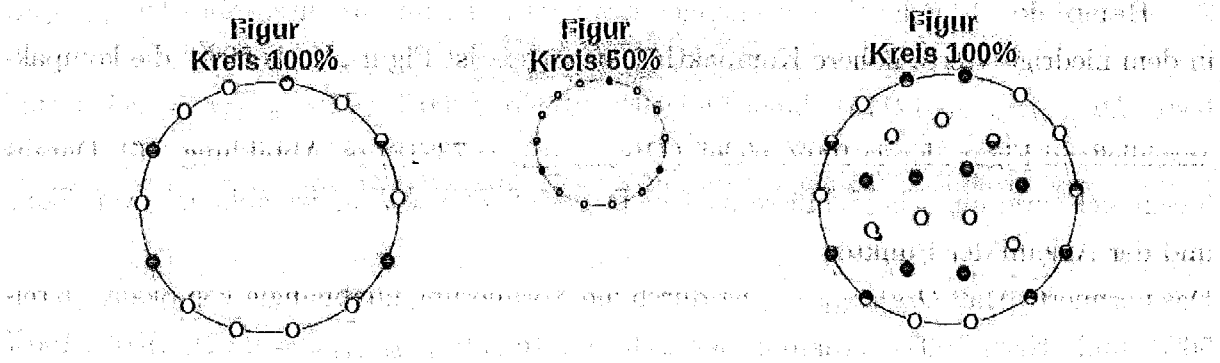


Abbildung 16: Kreis (14 Punkte) mit 100 bzw. 50 Prozent der Ausgangsgröße, Kreis 100 Prozent viele (27 Punkte); eigene Darstellung.

5.1.1 Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß

Das hier entwickelte Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß basiert auf der Idee vom Kompaktheitsmaß für Gebietsbausteine (z.B. Bezirke) von Papayanopoulos (Abschnitt 3.4.1): Papayanopoulos summiert die paarweisen (jeder Punkt zu allen anderen Punkten) euklidischen Entfernungen der Mittelpunkte eines Gebietsbausteins untereinander auf und bildet daraus ein absolutes Kompaktheitsmaß.

Dieser Ansatz wurde auf eine Punktmenge übertragen: Das Gebiet ist dargestellt durch eine Menge von Punkten und die Gebietsbausteine werden durch die Punkte der Punktmenge repräsentiert.

Nun wird für jeden Punkt der Luftlinien-Abstand zu allen anderen Punkten der Punktmenge aufsummiert. Das Kompaktheitsmaß ist die Summe dieser paarweisen euklidischen Distanzen.

1. **Definition** Das absolute Kompaktheitsmaß für n Punkte wird definiert als:

$$Dis_{\text{punkt1,abs}} = \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} l_2(x_i, x_j)$$

x_i, x_j sind die Punktkoordinaten.

Da es sich um ein absolutes Maß handelt, signalisieren höhere Werte niedrigere Kompaktheit.

Es ist möglich, das absolute Kompaktheitsmaß zu normieren. Hierbei wird wie folgt vorgegangen:

1. Bestimme $d^{\max} = \max_{i,j \in P} l_2(x_i, x_j)$.

2. $Dis_{\text{punkt1,norm}} = \frac{1}{n^2} \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} \frac{l_2(x_i, x_j)}{d^{\max}}$.

Durch die Normierung wird das Maß dimensionslos und unabhängig von Skala.

2. **Beispiele** Für die Untersuchungen des Kreises ist im absoluten Maß $Dis_{\text{punkt1,abs}}$, in dem niedrige Werte höhere Kompaktheit anzeigen, ist Figur „Kreis 50%“ die kompakteste ($Dis_{\text{punkt1,abs}} = 12175$), danach folgt Figur „Kreis 100%“ ($Dis_{\text{punkt1,abs}} = 24416$) und anschließend Figur „Kreis 100% viele“ ($Dis_{\text{punkt1,abs}} = 73818$) (s. Abbildung 16). Daraus lassen sich zwei einfache Schlüsse ziehen: Das Maß $Dis_{\text{punkt1,abs}}$ ist abhängig von Skala und der Anzahl der Punkte.

Das normierte Maß $Dis_{\text{punkt1,norm}}$ ist durch die Normierung unabhängig von Skala: „Kreis 50%“ und „Kreis 100%“ erhalten identische Werte ($Dis_{\text{punkt1,norm}} = 0.62$), „Kreis 100% viele“ schneidet schlechter ab ($Dis_{\text{punkt1,norm}} = 0.51$). Also ist Maß

$Dis_{\text{punkt1,norm}}$ von der Anzahl der Punkte abhängig.

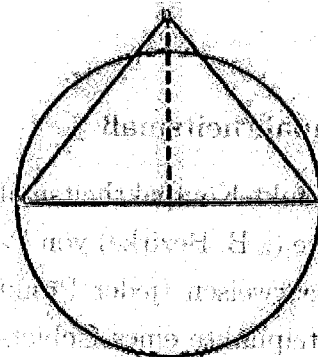


Abbildung 17: Reock-Gibbs-Dreieck mit 3 Punkten; eigene Darstellung.

Bei Untersuchungen der Figuren der Literatur ist in $Dis_{\text{punkt1,abs}}$ das „Reock-Gibbs Dreieck“ (Abbildung 17) mit einem niedrigen Wert von 1.782 das kompakteste (enthält 3 Punkte), während das „eingezackte Quadrat“ (Abbildung 18) (enthält 36 Punkte) mit

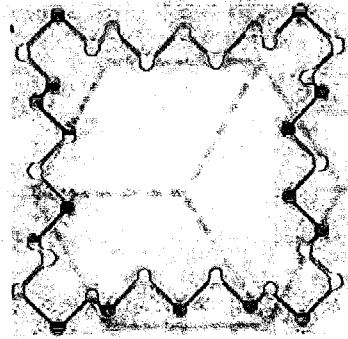


Abbildung 18: Eingezacktes Quadrat mit 36 Punkten; eigene Darstellung.

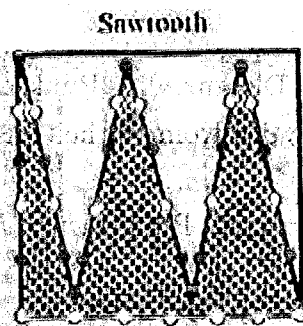


Abbildung 19: Sägezahn mit 36 Punkten; eigene Darstellung.

einem Wert von 188.528 das am schlechtesten kompakte ist. Hier ist der größte Einflussfaktor die Anzahl der Punkte.

Bei den Untersuchungen von $Dis_{punkt1,norm}$ fällt auf, dass die Spannbreite nicht groß ist: den minimalen Wert nimmt die Figur „Sägezahn“ (Abbildung 19) mit einem Wert von 0.41 ein, den maximalen Wert belegt das „Sechseck“ (Abbildung 20) mit einem Wert von 0.62. Damit ist das „Sechseck“ in $Dis_{punkt1,norm}$ genauso kompakt wie der unausgefüllte Kreis. Dies widerspricht zumindest nicht der intuitiven Betrachtung.

3. **Bewertung** Wie gezeigt, ist der generelle Defekt von $Dis_{punkt1,abs}$ die Abhängigkeit von Skala und der Anzahl der Punkte. Der Defekt von $Dis_{punkt1,norm}$ ist, dass es abhängig von der Anzahl der Punkte ist.

5.1.2 Punkt zu Schwerpunkt-Kompaktheitsmaß

Das absolute Punkt zu Schwerpunkt-Kompaktheitsmaß basiert auf der Idee vom Weaver-Hess-Flächenträgheitsmoment. In einem ersten Schritt wird mit einer Formel der Schwerpunkt der Punktmenge berechnet. In der politischen Gebietsplanung ist dieser Schritt aufwändiger. Das Kompaktheitsmaß ist die Summe der euklidischen Entfernungen zum Schwerpunkt.

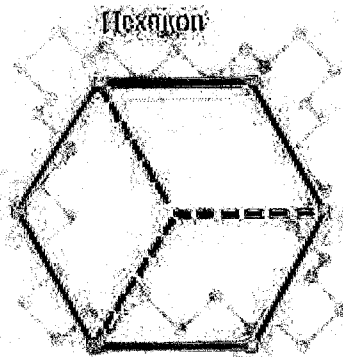


Abbildung 20: Sechseck mit 6 Punkten; eigene Darstellung.

Anschließend wird die euklidische Distanz aller Punkte zum Schwerpunkt aufsummiert. Diese Summe entspricht dem Wert des Kompaktheitsmaßes.

1. **Definition** Der Schwerpunkt einer Punktmenge P kann sehr einfach mit folgender Formel berechnet werden:

$$x_s = \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in P} x_i, \frac{1}{n} \sum_{i \in P} y_i \right)$$

Das Kompaktheitsmaß ist wie folgt definiert:

$$Dis_{punkt2,abs} = \sum_{i \in P} l_2(x_s, x_i)$$

2. **Beispiele** Zunächst wird wieder die intuitiv kompakte Figur des Kreises untersucht (Abbildung 16). Das absolute Punkt zu Schwerpunkt-Maß stuft die Figur „Kreis 50%“ am besten ein ($Dis_{punkt2,abs} = 686$), dann folgt „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt2,abs} = 1375$) und „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt2,abs} = 2020$). Also ist das Maß abhängig von Skala und der Anzahl von Punkten.

Von den Figuren der Literatur ist, wie beim Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß das „Reock-Gibbs-Dreieck“ (enthält 3 Punkte), das kompakteste ($Dis_{punkt2,abs} = 514$); am schlechtesten schneidet das „eingezackte Quadrat“ (enthält 36 Punkte) ab.

Ein normiertes Punkt zu Schwerpunkts-Maß konnte nicht entwickelt werden, da eine Normierung nicht möglich war.

3. **Bewertung** Wie $Dis_{punkt1,abs}$ ist $Dis_{punkt2,abs}$ abhängig von Skala und der Anzahl der Punkte.

5.1.3 l_2 -Center-Kompaktheitsmaß

Das absolute l_2 -Center-Kompaktheitsmaß bestimmt das Minimum der maximalen paarweise euklidische Distanz von zwei Punkten der Punktmenge.

Eine Normierung wäre nur möglich, wenn man das Problem global (Ausgangsmenge V) betrachten würde.

1. Definition $Dis_{punkt3,abs} = \min g(x)$ mit $g(x) = \max_{i,j \in P} l_2(x_i, x_j)$

2. Beispiele Zunächst werden wieder die drei kreisförmigen Punktmengen aus Abbildung 16 untersucht. Wie erwartet ist die Figur „Kreis 50%“ die kompakteste ($Dis_{punkt3,abs} = 100$). Interessant ist, dass das längste Distanz-Kompaktheitsmaß identische Werte

($Dis_{punkt2,abs} = 200$) für die Figuren „Kreis 100%“ und „Kreis 100% viele“ anzeigt. Das entspricht der Intuition, nämlich, dass beide kreisförmigen Punktmengen gleich kompakt sind. D.h. es besteht bei diesem Maß keine Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte. Jedoch bleibt die Abhängigkeit von Skala bestehen.

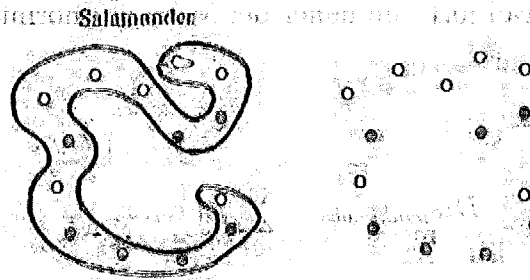


Abbildung 21: Salamander mit 14 Punkten neben der sehr kompakt wirkenden isolierten Punktmenge; eigene Darstellung.

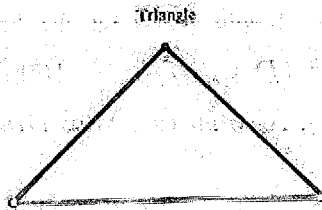


Abbildung 22: Youngs Dreieck mit 3 Punkten; eigene Darstellung.

Betrachtet man die Figuren der Literatur, so ist der „Salamander“ ($Dis_{punkt3,abs} = 215$, Abbildung 21) am kompaktesten. Dies ist äußerst kritisch zu bewerten, da diese Figur der „Klassiker“ für Manipulationen in der politischen Gebietsplanung ist. Die beiden dreiecksförmigen Figuren schneiden zu schlecht ab und landen im hinteren Drittel: Das Dreieck von „Reock-Gibbs“ landet auf Rang 13 ($Dis_{punkt3,abs} = 344$) und das von Dreieck von Young auf dem vorletzten Platz ($Dis_{punkt3,abs} = 411$, Abbildung 22).

3. **Bewertung** $Dis_{punkt3,abs}$ bietet gegenüber den beiden zuvor vorgestellten Maßen einen entscheidenden Vorteil: Es ist unabhängig von der Anzahl der Punkte. Jedoch kann durch dieses Maß der generelle Defekt der absoluten Punkt-Kompaktheitsmaße - nämlich die Abhängigkeit von Skala - nicht behoben werden.

5.1.4 l_2 -Median-Kompaktheitsmaß

Das l_2 -Median-Kompaktheitsmaß summiert die euklidischen Entfernungen zum knotenbeschränkten Median. Der Parameter der Zielfunktion ist der l_2 -Median der Punktmenge; die Summe der euklidischen Entfernungen vom l_2 -Median x_m zu allen anderen Punkten (=Zielfunktionswert) ist der Wert des Kompaktheitsmaßes. Höhere Werte signalisieren niedrigere Kompaktheit.

Eine Normierung des l_2 -Median-Kompaktheitsmaßes ist möglich: Man teilt den Zielfunktionswert des l_2 -Medians durch den Zielfunktionswert des umgekehrten l_2 -Medians x_{um} und erhält Werte im Intervall [0,1]. Je näher der Wert des normierten Maßes an 1 liegt, desto kompakter ist die Figur.

1. Definition

$$Dis_{punkt4,abs} = \sum_{i \in P} l_2(x_m, x_i)$$

$$Dis_{punkt4,norm} = \frac{\sum_{i \in P} l_2(x_m, x_i)}{\sum_{i \in P} l_2(x_{um}, x_i)}$$

2. **Beispiele** Zunächst werden wieder die drei kreisförmigen Punktmenge aus Abbildung 16 untersucht: die Figur „Kreis 50%“ ist die kompakteste ($Dis_{punkt4,abs} = 851$), danach folgt Figur „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt4,abs} = 1699$) und anschließend Figur „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt4,abs} = 2063$). Also ist das Maß $Dis_{punkt4,abs}$ abhängig von Skala und der Anzahl der Punkte.

Die übrigen Figuren schneiden im absoluten Maß wie folgt ab: Am schlechtesten schneidet die Figur „eingezacktes Quadrat“ ($Dis_{punkt4,abs} = 4616$) ab, was nach Intuition kritisch zu bewerten ist. Am besten schneidet das „Reock-Gibbs-Dreieck“ ($Dis_{punkt4,abs} = 547$) ab.



Abbildung 23: Dünner Strich mit 4 Punkten; eigene Darstellung.

Das normierte Maß $Dis_{punkt4,norm}$ hat eine größere Spannweite —und damit höhere Aussagekraft— als das andere normierte Maß $Dis_{punkt1,norm}$: Es reicht von der schlecht kompakten Figur „Sägezahn“ ($Dis_{punkt4,norm} = 0.56$) zur annähernd perfekt kompakten

Figur „Dünner Strich“ ($Dis_{punkt4,norm} = 1.00$, Abbildung 23), gefolgt vom ebenfalls kompakten „Sechseck“ ($Dis_{punkt4,norm} = 0.99$). Die erstgenannte Figur ist aber nach Intuition nicht kompakt.

Auch das normierte Maß ist abhängig von der Anzahl der Punkte, wie ein Vergleich von Figur „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt4,norm} = 0.94$) mit Figur „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt4,norm} = 0.64$) zeigt: Die Differenz ist mit 0.30 erheblich größer als beim anderen normierten Maß (0.09). Jedoch ist auch die Spannbreite dieses Maßes größer.

3. Bewertung Absolutes wie normiertes Maß sind abhängig von Skala und der Anzahl der Punkte.

5.1.5 Fazit

Alle Versuche, ein gutes oder zumindest befriedigendes Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß mit l_2 -Metrik zu finden, schlugen fehl. Dies scheiterte oft auch daran, dass keine Normierung möglich war.

5.2 Punkt-Kompaktheitsmaße mit l_2^2 -Metrik

Alle in diesem Abschnitt besprochenen Punkt-Kompaktheitsmaße basieren auf der quadrierten euklidischen Distanz (auch l_2^2 -Metrik) zweier Punkte:

$$l_2^2 = (x_i - y_i)^2 + (x_j - y_j)^2 \text{ mit } x, y \in P$$

Die quadrierte euklidische Distanz unterscheidet sich von denen, die nur die euklidische Distanz messen darin, dass weiter entfernt liegende Punkte schlechter bewertet werden.

Es wurden vier Kompaktheitsmaße entwickelt. Sie werden im Folgenden behandelt. Die vorgestellten Punkt-Kompaktheitsmaße messen Streuung. Höhere Kompaktheit minimiert die Streuung. Bei den absoluten Maßen signalisieren höhere Werte niedrigere Kompaktheit, bei den normierten Maßen verhält es sich umgekehrt.

Berechnungen wurden durchgeführt für die Beispielfiguren von Young, Manninen, Niemi et al. und Horn et al. untersuchten Figuren und die Kreise aus Abbildung 16) betrachtet.

5.2.1 Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß

Das hier entwickelte Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß basiert auf der Idee vom Kompaktheitsmaß für Gebietsbausteine von Papayanopoulos (3,4,1).

1. Definition Das absolute Kompaktheitsmaß für n Punkte wird definiert als:

$$Dis_{punkt1,abs} = \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} l_2^2(x_i, x_j)$$

Da es sich um ein absolutes Maß handelt, signalisieren höhere Werte niedrigere Kompaktheit.

Es ist möglich, das absolute Kompaktheitsmaß zu normieren. Hierbei wird wie folgt vorgegangen:

1. Bestimme $d^{max} = \max_{i,j \in P} l_2^2(x_i, x_j)$.
2. $Dis_{punkt1, norm} = \frac{1}{n^2} \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} \frac{l_2^2(x_i, x_j)}{d^{max}}$.

2. Beispiele Für die Untersuchungen des Kreises ist im absoluten Maß $Dis_{punkt1, abs}$ in dem niedrige Werte höhere Kompaktheit anzeigen, ist Figur „Kreis 50%“ die kompakteste ($Dis_{punkt1, abs} = 941562$), danach folgt Figur „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt1, abs} = 3786642$) und anschließend Figur „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt1, abs} = 91963348$) (s. Abbildung 16). Daraus lassen sich zwei einfache Schlüsse ziehen: Das Maß $Dis_{punkt1, abs}$ ist, ebenso wie das analoge Maß aus Abschnitt 5.1.1 abhängig von Skala und der Anzahl der Punkte.

Das normierte Maß $Dis_{punkt1, norm}$ ist durch die Normierung unabhängig von Skala. „Kreis 50%“ und „Kreis 100%“ erhalten identische Werte ($Dis_{punkt1, norm} = 0.48$), „Kreis 100% viele“ scheidet durch die größere Anzahl an Punkten schlechter ab ($Dis_{punkt1, norm} = 0.32$).

Bei Untersuchungen der Figuren der Literatur ist in $Dis_{punkt1, abs}$ das „Reock-Gibbs-Dreieck“ mit einem niedrigen Wert von 536500 das kompakteste, während das „eingezackte Quadrat“ mit einem Wert von 33814016 das am schlechtesten kompakte ist. Hier ist der größte Einflussfaktor die Anzahl der Punkte.

Bei den Untersuchungen von $Dis_{punkt1, norm}$ fällt auf, dass die Spannbreite nicht groß ist: den minimalen Wert nimmt die Figur „Sägezahn“ mit einem Wert von 0.21 ein, den maximalen Wert belegen — hier unterscheidet sich das Maß von Pendant in 5.1.1, wo das „Sechseck“ auf dem ersten Rang landet — das „Reock-Gibbs-Dreieck“ und die Figur „Dünner Strich“ mit einem Wert von 0.5. Danach folgen das „Sechseck“ (0.49), „Kreis 50“ (0.48) und „Kreis 100“ (0.48).

3. Bewertung Wie gezeigt, ist der generelle Defekt von $Dis_{punkt1, abs}$ die Abhängigkeit von Skala und der Anzahl der Punkte. Der Defekt von $Dis_{punkt1, norm}$ ist, dass es abhängig von der Anzahl der Punkte ist.

5.2.2 Punkt zu Schwerpunkt-Kompaktheitsmaß

Das absolute Punkt zu Schwerpunkt-Kompaktheitsmaß basiert auf der Idee vom Weaver-Hess-Flächenträgheitsmoment.

1. **Definition** Der Schwerpunkt einer Punktmenge kann sehr einfach mit folgender Formel berechnet werden:

$$x_s = \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in P} x_i, \frac{1}{n} \sum_{i \in P} y_i \right)$$

Das Kompaktheitsmaß ist wie folgt definiert:

$$Dis_{punkt2,abs} = \sum_{i \in P} l_2^2(x_s, x_i)$$

2. **Beispiele** Zunächst wird wieder die intuitiv kompakte Figur des Kreises untersucht (Abbildung 16). Das absolute Punkt zu Schwerpunkt-Maß stuft die Figur „Kreis 50%“ am besten ein ($Dis_{punkt2,abs} = 33627$), dann folgt „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt2,abs} = 135237$) und „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt2,abs} = 170303$). Also ist das Maß abhängig von Skala und der Anzahl von Punkten.

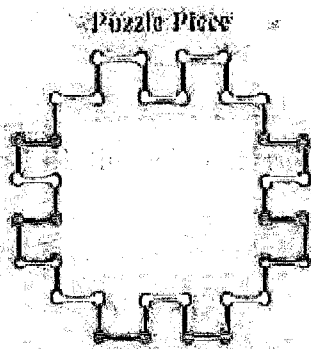


Abbildung 24: Puzzlestück mit 36 Punkten; eigene Darstellung.

Von den Figuren der Literatur ist das „Sechseck“ (enthält 3 Punkte) das kompakteste ($Dis_{punkt2,abs} = 85090$); am schlechtesten schneidet das „Puzzle“ (Abbildung 24) ab.

Ein normiertes Punkt zu Schwerpunkts-Maß konnte nicht entwickelt werden, da keine Normierung gefunden werden konnte.

3. **Bewertung** Wie $Dis_{punkt1,abs}$ ist $Dis_{punkt2,abs}$ abhängig von Skala und der Anzahl der Punkte.

5.2.3 l_2 -Center-Kompaktheitsmaß

Das absolute l_2 -Center-Kompaktheitsmaß bestimmt das Minimum der maximalen paarweise euklidische Distanz von zwei Punkten der Punktmenge.

Eine Normierung wäre nur möglich, wenn man das Problem global (Ausgangsmenge V) betrachten würde.

1. **Definition** $Dis_{punkt3,abs} = \min g(x)$ mit $g(x) = \max_{i,j \in P} l_2(x_i, x_j)$.

2. Beispiele Zunächst werden wieder die drei kreisförmigen Punktmengen aus Abbildung 16 untersucht. Wie erwartet ist die Figur „Kreis 50%“ die kompakteste ($Dis_{punkt3,abs} = 9197$). Das längste Distanz-Kompaktheitsmaß liefert —im Gegensatz zum Pendant 5.1.2— unterschiedliche Werte für die Figuren „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt3,abs} = 37273$) und „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt3,abs} = 14836$) anzeigt. Das widerspricht der Intuition, nämlich, dass beide kreisförmigen Punktmengen gleich kompakt sind. D.h. es besteht bei diesem Maß besteht eine Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte und Skala.

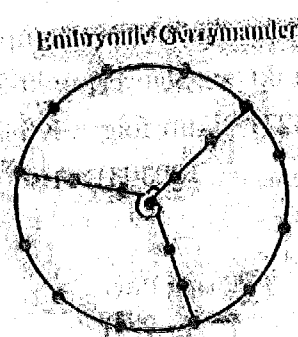


Abbildung 25: Embryonic Gerrymander mit 19 Punkten; eigene Darstellung.

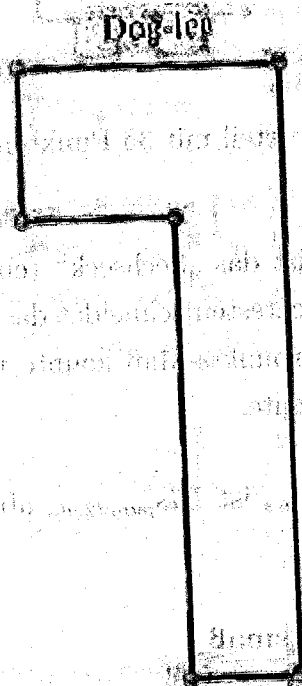


Abbildung 26: Winkel mit 6 Punkten; eigene Darstellung.

Betrachtet man die Figuren der Literatur, so ist der „Embryonic Gerrymander“ ($Dis_{punkt3,abs} = 15058$, (Abbildung 25) am kompaktesten. Am schlechtesten schni-

den die Figuren „Winkel“ ($Dis_{punkt3,abs} = 90164$, (Abbildung 26) und „Dünner Strich“ ($Dis_{punkt3,abs} = 163193$) ab.

3. **Bewertung** $Dis_{punkt3,abs}$ ist im Gegensatz zu seinem Pendant in 5.1.3 nicht unabhängig von der Anzahl der Punkte. Ferner ist es nicht unabhängig von Skala.

5.2.4 l_2^2 -Median-Kompaktheitsmaß

Das l_2^2 -Median-Kompaktheitsmaß summiert die quadrierten euklidischen Entfernungen zum knotenbeschränkten Median. Der Parameter der Zielfunktion ist der l_2^2 -Median der Punktmenge; die Summe der euklidischen Entfernungen vom l_2^2 -Median x_m zu allen anderen Punkten (=Zielfunktionswert) ist der Wert des Kompaktheitsmaßes. Höhere Werte signalisieren niedrigere Kompaktheit.

Eine Normierung des l_2^2 -Median-Kompaktheitsmaßes ist möglich: Man teilt den Zielfunktionswert des l_2^2 -Medians durch den Zielfunktionswert des umgekehrten l_2^2 -Medians x_{um} und erhält Werte im Intervall $[0,1]$. Je näher der Wert des normierten Maßes an 1 liegt, desto kompakter ist die Figur.

1. Definition

$$Dis_{punkt4,abs} = \sum_{i \in P} l_2^2(x_m, x_i)$$

$$Dis_{punkt4,norm} = \frac{\sum_{i \in P} l_2^2(x_m, x_i)}{\sum_{i \in P} l_2^2(x_{um}, x_i)}$$

2. **Beispiele** Zunächst werden wieder die drei kreisförmigen Punktmenge aus Abbildung 16 untersucht: die Figur „Kreis 50%“ ist die kompakteste ($Dis_{punkt4,abs} = 65039$), danach folgt Figur „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt4,abs} = 261189$) und anschließend Figur „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt4,abs} = 183096$). Also ist das Maß $Dis_{punkt4,abs}$ abhängig von Skala. Ob es von der Anzahl der Punkte abhängig ist, kann nicht eindeutig beantwortet werden; interessant ist aber, dass Kreis „Kreis 100%“ schlechter abschneidet als „Kreis 100%“ viele. Dies liegt eventuell daran, dass die Punkte dichter gepackt sind.

Die Figuren der Literatur schneiden im absoluten Maß wie folgt ab: Am schlechtesten schneidet die Figur „eingezacktes Quadrat“ ($Dis_{punkt4,abs} = 710178$) ab, ebenso wie beim Maß aus 5.1.4. Am besten schneidet der „Ellbogen“ ($Dis_{punkt4,abs} = 110957$, Abbildung 27) ab.

Das normierte Maß reicht von der schlecht kompakten Figur „Sägezahn“ ($Dis_{punkt4,norm} = 0.3$) zur perfekt kompakten Figur „Dünner Strich“ ($Dis_{punkt4,norm} = 1.00$), gefolgt vom ebenfalls kompakten „Sechseck“ ($Dis_{punkt4,norm} = 0.97$) — analog zum Maß aus 5.1.4.

Auch das normierte Maß ist abhängig von der Anzahl der Punkte, wie ein Vergleich von

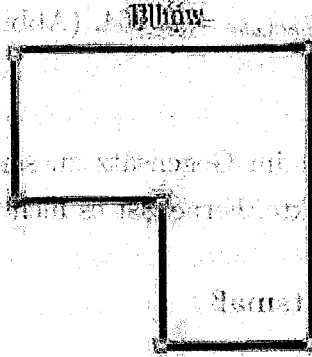


Abbildung 27: Winkel mit 6 Punkten; eigene Darstellung.

Figur „Kreis 100%“ ($Dis_{punkt,norm} = 0.91$) mit Figur „Kreis 100% viele“ ($Dis_{punkt,norm} = 0.4$) zeigt: Die Differenz ist mit 0.51 erheblich größer als bei den normierten Maßen aus 5.2.1 (0.29), 5.1.4 (0.30) und 5.1.1 (0.09).

3. Bewertung Absolutes wie normiertes Maß sind abhängig von Skala. Ob aber eine Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte besteht, kann nicht eindeutig beantwortet werden.

5.2.5 Fazit

Alle Versuche, ein gutes oder zumindest befriedigendes Punkt zu Punkt-Kompaktheitsmaß mit l_2 -Metrik zu finden, schlugen fehl. Dies scheiterte oft auch daran, dass keine Normierung möglich war. Ein befriedigendes Maß müsste unabhängig von der Anzahl der Punkte und unabhängig von Skala sein.

5.3 Einzelpunkte zu Flächen

Da alle Punkt-Kompaktheitsmaße — wie gezeigt — defekt sind, besteht die Möglichkeit, aus einer Lösung eines Gebietsplanungsproblems, also einer Aufteilung einer Punktmenge P in mehrere Punktmenge aufgrund eines Gebietsplanungsalgorithmus, ein Raster oder ein Voronoi-Diagramm zu erstellen.

Dabei wird wie folgt vorgegangen:

- man setzt die Basisgebiete — der Lösung des Gebietsplanungsalgorithmus gemäß — zusammen.
- man bestimmt mit einem geeigneten Kompaktheitsmaß die Kompaktheit der so zusammengesetzten Basisgebiete.

5.3.1 Raster von Laporte et al.

1. **Definition** Laporte et al. beschäftigen sich mit dem Vehicle Routing Problem für stochastische und reguläre Kunden. Dabei wird Kompaktheit als eines von drei Kriterien in der Zielfunktion berücksichtigt. Die Zielfunktion

$$\min_x F(x) = \alpha_m m + \alpha_{erc} F_{erc} + \alpha_{comp} F_{comp}$$

ist eine Linearkombination von drei Termen und ist folgendermaßen aufgebaut: Der erste Term behandelt die Anzahl der Fahrzeuge, der zweite Term die erwarteten Routingkosten und der dritte Term die Kompaktheit. α_m , α_{erc} und α_{comp} sind die nicht negativen benutzerdefinierten Parameter, die die einzelnen Kriterien ihrer relativen Bedeutung nach gewichtet einfließen lassen. Für diese Arbeit relevant ist nur die Bestimmung des dritten Terms, der die Kompaktheit der Gebietseinteilung bestimmt.

Das Ausgangsproblem besteht aus einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ mit einer Menge von Knoten $V = \{v_0, V\}$, wobei V aus stochastischen wie regulären Kunden besteht, die in einem Koordinatensystem angeordnet sind, sowie einer Menge von Kanten $E = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i < j\}$. Möchte man nur aus Einzelpunkten Flächen bilden, und das Vehicle Routing Problem nicht lösen (hier der Fall), muss man die Punkte der Punktmenge jedoch nicht als Knoten eines Graphen interpretieren.

Laporte et al. begrenzen das Gebiet zunächst durch das umschreibende Rechteck und legen über dieses ein Raster. Anschließend werden die Rechtecke des Rasters dem jeweils nächsten Punkt zugeordnet. Es entsteht ein Gebilde ähnlich des Voronoi-Diagramms, wobei die Grenzen der entstandenen Basisgebiete hier jedoch keine geraden Linien, sondern stufenförmige, gezackte Linien sind.

Für die entstandenen Basisgebiete des Gebiets wird das globale und normierte Umfangsmaß von Bozkaya et al. verwendet, um die Kompaktheit der vorliegenden Gebiets-einteilung zu bestimmen:

$$F_{comp} = \frac{\sum_{k=1}^m B_k(x) - B}{2Bm}$$

Hierbei ist m die Anzahl der Gebiete, $B_k(x)$ der Umfang des Gebiets k in Lösung x und B ist der Umfang des s . Die Formel errechnet die mittlere normalisierte Länge des Umfangs aller Gebiete. Sie ist einfach anzuwenden und führt zu einer visuell kompakten Gebietseinteilung.

Zunächst wird das kleinste umschreibende Rechteck um alle Kundenkoordinaten definiert:

$$[x_{min} = \min_{i \in P} x_i, x_{max} = \max_{i \in P} x_i] \text{ und } [y_{min} = \min_{i \in P} y_i, y_{max} = \max_{i \in P} y_i].$$

Die Partitionierung des Gebiets in n_u rechteckige Ausgangs-Basisgebiete erfolgt folgendermaßen:

- Zunächst wird der minimale horizontale bzw. vertikale axiale l_2 -Abstand zwischen zwei Kunden/Punkten d nach folgender Formel bestimmt:

$$d = \min \left\{ \min_{i,j \in P} \{|x_i - x_j|\}, \min_{i,j \in P} \{|y_i - y_j|\} \right\}$$

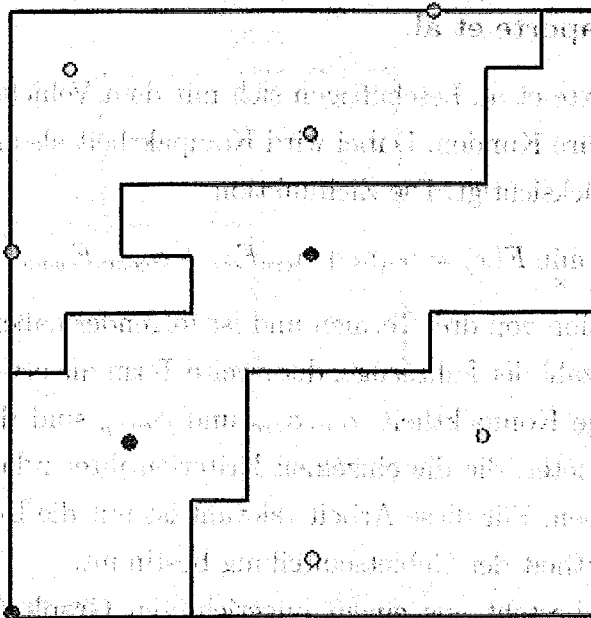


Abbildung 28: Punkt-Gebietsmenge P mit $n = 10$ und Raster nach Laporte et al. (eigene Darstellung)

Mit Hilfe von d wird nun das Raster bestimmt:

- Entlang der x -Achse enthält das Gebiet $\lceil x_{\max} - x_{\min}/d \rceil$ Ausgangs-Basisgebiete,
- entlang der y -Achse enthält das Gebiet $\lceil y_{\max} - y_{\min}/d \rceil$ Ausgangs-Basisgebiete,
- sodass das gesamte Gebiet in ein Raster von

$$n_d = \lceil x_{\max} - x_{\min}/d \rceil * \lceil y_{\max} - y_{\min}/d \rceil$$

Ausgangs-Basisgebieten unterteilt wird.

[Laporte et al.]

2. Beispiele Es wurden aus einer zufälligen Punktemenge P ($n = 10$) zwei unterschiedliche Gebietseinteilungen auf dem Raster von Laporte erzeugt. Das Raster wurde zur einfacheren Berechnung grafisch manuell auf ein $10*10$ Raster-Quadrat gelegt. Der minimale Wert ist eigentlich $d = 0$. Laporte sieht keinen Sonderfall $d = 0$ vor. Um dennoch ein Raster zu erzeugen, wurde der minimale Abstand $d = 1$ gewählt. $d = 1$ ist der nächstgrößere Abstand, der nicht null ist.

Abbildung 28 zeigt das Raster von Laporte mit 3 Gebieten.

Anschließend wurden die Gebietsumfänge grafisch bestimmt und das Maß von Bozkaya ermittelt:

$$F_{comp} = \frac{98 + 40}{2 * 40 * 3} = 0,24$$

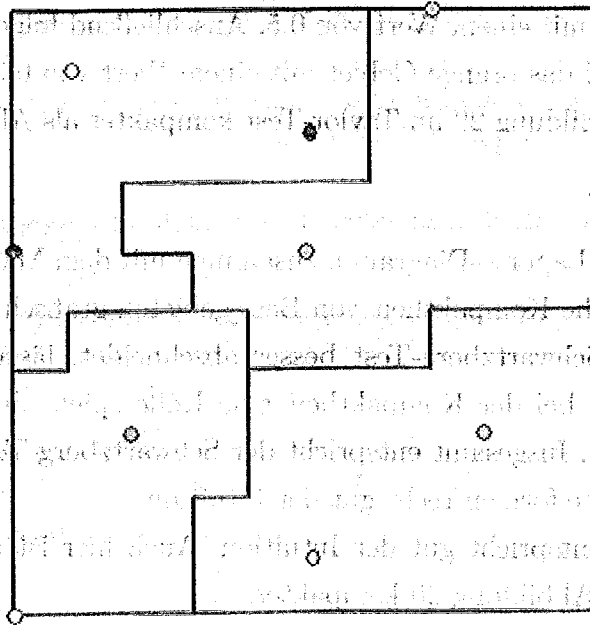


Abbildung 29: Punktmenge P mit $n = 10$ und Raster nach Laporte et al. (eigene Darstellung)

Abbildung 29 zeigt das Raster von Laporte mit 4 Gebieten und derselben Punktmenge wie Abbildung 28. Das Maß von Bozkaya beträgt:

$$F_{comp} = \frac{92 - 40}{2 * 40 * 4} = 0,16$$

Um die Kompaktheitsmaße für Flächen anzuwenden, wurden danach die Flächen der Gebiete ausgezählt. Es wurde der Schwartzberg-Test Per_4 angewandt. Für Abbildung 28 ist das grüne Gebiet rechts unten das kompakteste ($Per_4 = 1,25$), darauf folgt das blaue Gebiet links oben ($Per_4 = 1,62$). Als einziges Gebiet würde das rote diagonale Gebiet die willkürliche Grenze aus der Literatur [Young] von 1,67 verfehlen ($Per_4 = 1,87$). Insgesamt bekommt die Gebietseinteilung einen schlechten durchschnittlichen Kompaktheitswert von $Per_4 = 1,58$.

Im Schwartzberg-Test für Abbildung 29 teilen sich das blaue links unten und das orange Gebiet rechts oben den ersten Rang ($Per_4 = 1,23$), danach folgt das grüne Gebiet rechts unten ($Per_4 = 1,25$). Mit einem Abstand am schlechtesten schneidet das rote Gebiet links oben ab ($Per_4 = 1,49$), sodass die Gebietseinteilung letztendlich einen Kompaktheitswert von $Per_4 = 1,3$ erhält.

Nach der Untersuchung des Schwartzberg-Tests wurde der Taylor-Test angewandt, der die Innenwinkel untersucht. Danach ist in Abbildung 28 das grüne Gebiet mit einem Wert von 0,5 am kompaktesten. Dann folgt das blaue Gebiet mit einem Wert von 0,33 und dann das rote Gebiet mit einem Wert von 0,2. Dies entspricht der Intuition, da das rote Gebiet offensichtlich das am wenigsten kompakte ist.

Anschließend wurde Abbildung 29 untersucht. Hier teilen sich das blaue und das grüne

Gebiet des ersten Rang mit einem Wert von 0,5. Anschließend folgen das rote Gebiet mit einem Wert von 0,4 und das orange Gebiet mit einem Wert von 0,33.

Im Durchschnitt ist Abbildung 29 im Taylor-Test kompakter als Abbildung 28 mit einem Wert von 0,43 zu 0,34.

3. Bewertung Das Laporte-Diagramm zusammen mit dem Maß von Bozkaya ist eine einfache Methode, um die Kompaktheit von Basisgebieten grafisch zu bestimmen.

Da Abbildung 29 im Schwartzberg-Test besser abschneidet, lässt sich vermuten, dass die Anzahl der Gebiete bei der Kompaktheit eine Rolle spielt: Je mehr Gebiete, desto besser die Kompaktheit. Insgesamt entspricht der Schwartzberg-Test nach Augenschein-Untersuchung der Gebietsformen recht gut der Intuition.

Auch der Taylor-Test entspricht gut der Intuition. Auch hier ist die Abbildung 29 mit einem Gebiet mehr als Abbildung 28 kompakter.

5.3.2 Voronoi-Diagramme

Das Voronoi-Diagramm ist ein Ansatz, um für jeden Einzelpunkt einer Punktmenge P mit n Punkten ein Basisgebiet (bzw. eine Fläche) zu bilden. Hierbei werden nur ungewichtete Voronoi-Diagramme, deren Punkte keine Gewichtung haben, betrachtet, da gewichtete Voronoi-Diagramme nicht zusammenhängende Flächen erzeugen können. Anschließend werden die Basisgebiete, der Aufteilung des Gebietsplanungsproblems entsprechend, zu zusammenhängenden Flächen zusammengesetzt und können anschließend mit den bewährten Flächenkompaktheitsmaßen (Abschnitt 3) bewertet werden.

Voronoi-Diagramme gehören zu den Modellen vollständiger Zuordnung und finden in der Standortplanung unter Wettbewerb Anwendung. Hier wird für jeden Kunden x eines Gebiets T eindeutig entschieden, welche der n Einrichtungen (bspw. ein Einkaufsladen), dargestellt durch einen Punkt x_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $x_i \in P$, für ihn die attraktivste ist. Umgekehrt ist hierdurch für jede Einrichtung x_i das Basisgebiet (Kundeneinzugsgebiet), d.h. der Teil des Gebiets, welcher einzig und allein von dieser Einrichtung abgedeckt wird, eindeutig bestimmt.

1. Definition Die Basisgebiete bilden disjunkte und vollständig-überdeckende Partitionen in Basisgebiete des gesamten Gebiets T .

Typische Modelle zur Vorhersage des besten Standortes basieren auf:

- der Nähe zwischen Kunden und Einrichtungen, z.B. der Wegstrecke oder der euklidischen Entfernung,
- den Kosten, welche zur Befriedigung der Nachfrage anfallen, z.B. Transport- und Produktkosten und
- dem Nutzen der verschiedenen Einrichtungen für den Kunden.

Die Absatzgebiete basieren auf der euklidischen Distanz

1. Zunächst wird ein Gebiet T in der Ebene \mathbb{R}^2 betrachtet, mit zwei Firmen, die durch Punkte an den Standorten x_A bzw. x_B dargestellt werden.
2. Da ein Kunde, dargestellt durch einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ seine Nachfrage immer vom nächstgelegenen Punkt befriedigen wird, wird er zum Beispiel x_A aufsuchen, falls die Entfernung von x zu x_A kleiner als zu x_B ist.

$$l_2(x - x_A) < l_2(x - x_B)$$

Damit umfasst das Absatzgebiet MA_A des Filialstandortes x_A all diejenigen Punkte, welche näher zu x_A als zu x_B liegen.

$$MA_A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid l_2(x - x_A) < l_2(x - x_B)\}$$

Analog für MA_B . Als die Indifferenzmenge IS_{AB} bezeichnet man die Menge aller Punkte, welche gleichweit von den beiden Standorten x_A und x_B , entfernt liegen

$$IS_{AB} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid l_2(x - x_A) = l_2(x - x_B)\}$$

Die Indifferenzmenge beschreibt die Grenze zwischen beiden Basisgebieten. Im Fall der euklidischen Distanz ist die Indifferenzmenge die Mittelsenkrechte zwischen x_A und x_B (s. Abbildung 30, Figur links).

Analog verhält sich die Aufteilung, falls ein dritter Konkurrent x_C hinzukommt und sich die Partition entsprechend verändert. Das grafische Gebilde der Grenzen der Absatzgebiete untereinander nennt man Voronoi-Diagramm (s. Abbildung 30, Figur rechts).

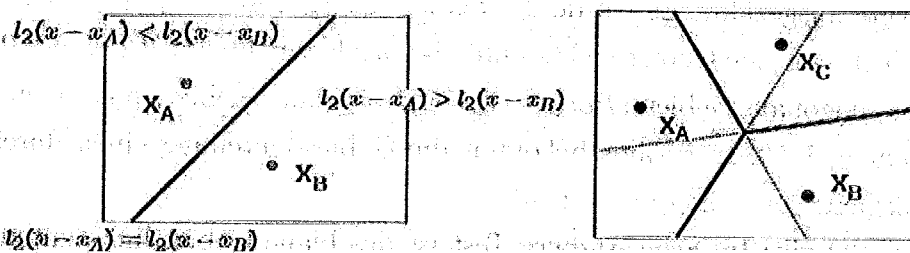


Abbildung 30: Voronoi-Diagramm mit zwei bzw. drei Punkten [Nickel, Standortplanung]

Nach der Bildung des Voronoi-Diagramms können die gängigen Kompaktheitsmaße für Flächen darauf angewendet werden, oder das Maß von Bozkaya.

2. Beispiele Es wurden aus einer zufälligen Punktmenge P ($n = 10$) zwei unterschiedliche Gebietsenteilungen nach Voronoi erzeugt.

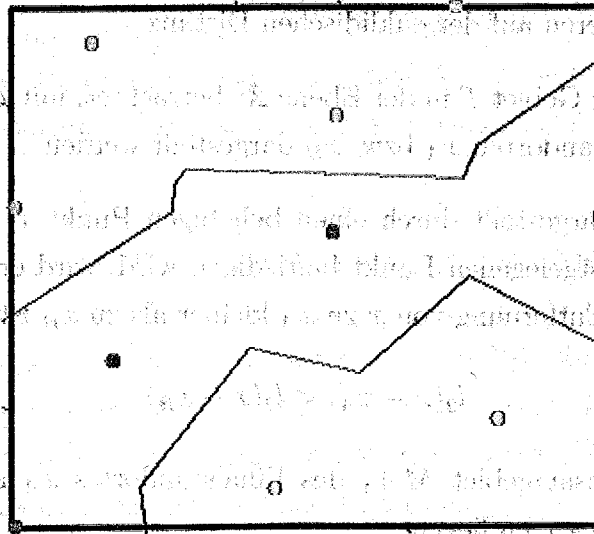


Abbildung 31: Punktmenge P mit $n = 10$ und Voronoi-Diagramm (eigene Darstellung)

Abbildung 31 zeigt ein Voronoi-Diagramm mit 3 Gebieten. Es wurden die Gebietsumfänge durch Auszählen bestimmt und das Maß von Bozkaya ermittelt:

$$F_{comp} = \frac{242 - 110}{2 * 110 * 3} = 0,2$$

Abbildung 32 zeigt das Voronoi-Diagramm mit 4 Gebieten und derselben Punktmenge wie in Abbildung 31. Das Maß von Bozkaya beträgt:

$$F_{comp} = \frac{256 - 110}{2 * 110 * 4} = 0,17$$

Um die Kompaktheitsmaße für Flächen anzuwenden, wurde danach die Flächen der jeweiligen Gebiete ausgezählt. Es wurde der Schwartzberg-Test Per_4 angewandt. Für Abbildung 31 gilt: Das grüne Gebiet rechts unten ist das kompakteste ($Per_4 = 1,22$), darauf folgt das rote diagonale Gebiet ($Per_4 = 1,47$). Das blaue Gebiet links oben hat einen Wert von $Per_4 = 1,53$. Insgesamt bekommt die Gebietseinteilung einen durchschnittlichen Kompaktheitswert von $Per_4 = 1,40$.

Für Abbildung 32 gilt: Im Schwartzberg-Test ist das blaue Gebiet links unten das kompakteste ($Per_4 = 1,09$). Darauf folgt das grüne Gebiet rechts unten ($Per_4 = 1,18$), dann das rote links oben ($Per_4 = 1,30$). Den letzten Platz nimmt das orange Gebiet rechts oben ein ($Per_4 = 1,47$). Insgesamt hat die Gebietseinteilung einen durchschnittlichen Kompaktheitswert von 1,26 und schneidet somit besser ab als Abbildung 31.

Nach der Untersuchung des Schwartzberg-Tests wurde der Taylor-Test angewandt, der die Innenwinkel untersucht. Nach dem Taylor-Test ist in Abbildung 31 das grüne Gebiet mit einem Wert von 0,71 am kompaktesten. Dann folgt das rote Gebiet mit einem Wert von 0,38 und dann das blaue Gebiet mit einem Wert von 0,33. Dies widerspricht der Intuition, da das rote Gebiet offensichtlich das am wenigsten kompakte ist.

Anschließend wurde Abbildung 32 untersucht. Hier ist das grüne Gebiet am kompaktesten

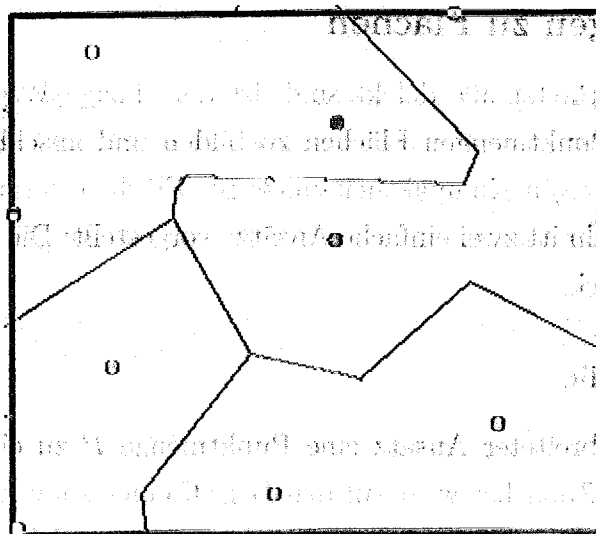


Abbildung 32: Punktmenge P mit $n = 10$ und Voronoi-Diagramm (eigene Darstellung)

mit einem Wert von 0,71; es folgt das blaue Gebiet mit einem Wert von 0,66, anschließend das rote Gebiet (0,5) und das orange Gebiet (0,45). Im Durchschnitt ist Abbildung 32 im Taylor-Test kompakter als Abbildung 31 mit einem Wert von 0,58 zu 0,47.

3. Bewertung Das Voronoi-Diagramm ist eine verlässliche Methode, um die Kompaktheit von Basisgebieten grafisch zu bestimmen. Die Schlussfolgerung enthält Parallelen zur Schlussfolgerung aus dem Laporte-Diagramm:

Da Abbildung 32 im Schwartzberg-Test besser abschneidet, lässt sich vermuten, dass die Anzahl der Gebiete bei der Kompaktheit eine Rolle spielt: Je mehr Gebiete, desto besser die Kompaktheit. Insgesamt entspricht der Schwartzberg-Test nach Augenschein-Untersuchung der Gebietsformen recht gut der Intuition.

Auch der Taylor-Test entspricht gut der Intuition. Auch hier ist die Abbildung 32 mit einem Gebiet mehr als in Abbildung 31 kompakter.

5.3.3 Fazit

Das Raster von Laporte et al. und das Voronoi-Diagramm sind zusammen mit den Kompaktheitsmaßen für Flächen gute Methoden, um die Kompaktheit von Gebieten zu bestimmen. Alle Flächenbildungsalgorithmen haben einen Defekt. Beim Raster von Laporte ist unklar, was passiert, wenn 2 Punkte auf der selben x- bzw. y-Achse liegen. Beim Voronoi-Diagramm können am Rand Gebiete entstehen, die von der Fläche her unrealistisch groß sind.

5.4 Punktmengen zu Flächen

Da alle Punktkompaktheitsmaße defekt sind, ist der einzige Weg, die Kompaktheit zu bestimmen, aus den Punktmengen Flächen zu bilden und anschließend die aus der Literatur bekannten gängigen Kompaktheitsmaße für Flächen darauf anzuwenden. Hierzu werden in diesem Abschnitt zwei einfache Ansätze vorgestellt: Die konvexe Hülle und das umschreibende Rechteck.

5.4.1 Konvexe Hülle

Ein einfacher und verbreiteter Ansatz eine Punktmenge P zu einer Fläche zu formen, ist die konvexe Hülle. Zunächst wird auf den Begriff einer konvexen Menge eingegangen und dann die konvexe Hülle definiert, bevor auf Beispiele und Vor- und Nachteile dieser Variante der Flächenbildung eingegangen wird.

1. Definition des Begriffs „konvexe Menge“ Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten $x^1 \in K$ und $x^2 \in K$ auch jeder Punkt $y = \delta x^1 + (1 - \delta)x^2$ (auch „konvexe Linearkombination“ genannt) mit $0 < \delta < 1$ zu K gehört (s. Abbildung 33).

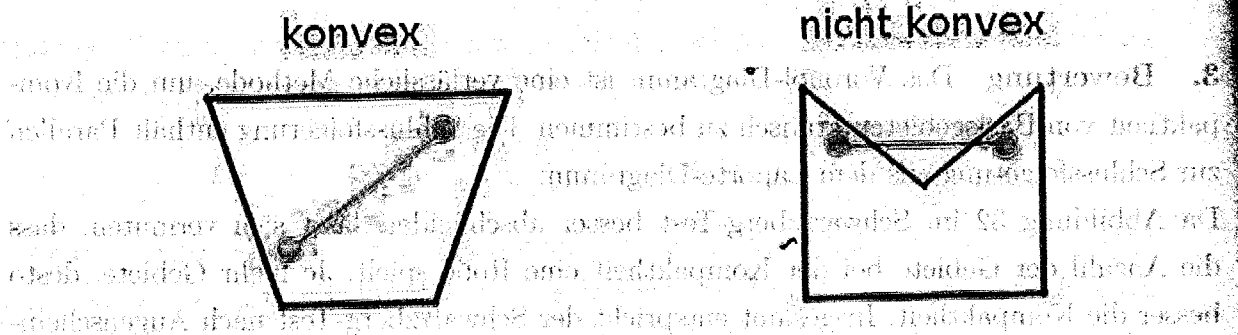


Abbildung 33: Konvexe Menge verglichen mit einer nicht konvexen Menge

2. Definition des Begriffs „konvexe Hülle“ Die konvexe Hülle hat drei Eigenschaften: Sie ist die

1. kleinste
2. konvexe Menge
3. welche die gesamte Punktmenge P enthält.

Die konvexe Hülle einer beliebigen endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

$$\text{conv } P := \bigcap \{ \tilde{K} \subset \mathbb{R}^n : P \subset \tilde{K}, \tilde{K} \text{ konvex} \}$$

Bildlich gesprochen ist die konvexe Hülle die Form, die entsteht, wenn man ein rundes, aufgespanntes Gummi, ringsum über die Punktmenge P geben, und anschließend die Spannung lösen würde. Das Gummi würde jetzt durch die Eckpunkte der Punktmenge P geformt und gleichzeitig ihre konvexe Hülle $co P$ begrenzen.

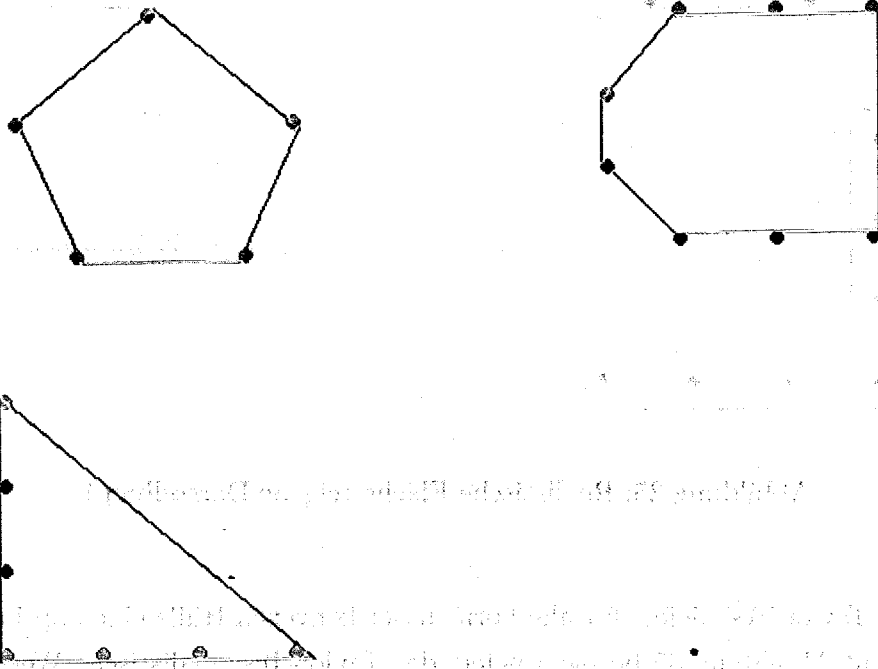


Abbildung 34: Konvexe Hülle (eigene Darstellung)

3. Beispiel In Abbildung 34 und Abbildung 35 jeweils Figur links oben ist zu erkennen, bei welchen Punktmenge die konvexe Hülle gut funktioniert.

In Abbildung 34 Figur rechts ist eine hufeisenförmige Punktmenge dargestellt, bei der die konvexe Hülle versagt (vgl. realistische, hufeisenförmige Fläche in Abbildung 35 rechts). Die Darstellung der Fläche ist nicht realistisch. Die Fläche ist zu groß und beinhaltet zu viel Leerraum.

Die Flächenbildung wirkt sich auf die anschließend zu bestimmende Kompaktheit aus, die mit den aus der Literatur bekannten Kompaktheitsmaßen für Flächen berechnet wird.

Der Schwartzberg-Test liefert für die realistische hufeisenförmige Fläche einen schlechten Wert ($Per_4 = 2,75$), während die konvexe Hülle der Hufeisen-Form einen sehr guten Wert von $Per_4 = 0,9$ liefert.

Ebenso beim Beispiel der winkelförmigen Fläche in den Abbildungen 34 und 35 Figur jeweils links unten. Die konvexe Hülle liefert im Schwartzberg-Test einen zu guten Wert von $Per = 1,13$, während die realistische Fläche in mit einem Wert von $Per_4 = 1,9$ durchfallen würde.

Bei der Anwendung des Taylor-Test fällt auf, dass auch hier die konvexe Hülle ungeeignet

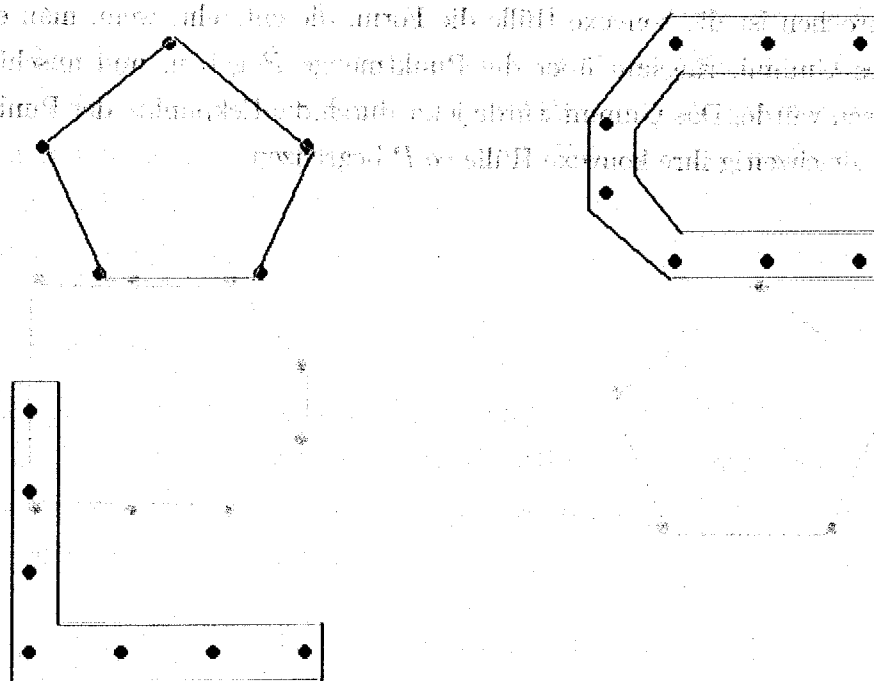


Abbildung 35: Realistische Fläche (eigene Darstellung)

scheint. Der Taylor-Test liefert für alle Formen der konvexen Hülle einen optimalen Wert von 1,0 — auf Abbildung 35 bezogen liefert der Taylor-Test realistische Werte von 0,45 für die Hufeisen-Form und 0,66 für die Winkelform.

4. **Bewertung** Die Berechenbarkeit der konvexen Hülle ist gut — es gibt Algorithmen wie den Graham-Scan oder QuickHull. Bei hufeisenförmigen oder winkelförmigen Punktmengen versagt die konvexe Hülle. Deswegen ist fraglich, ob die konvexe Hülle eine geeignete Art der Flächenbildung ist. Deshalb muss im Einzelfall entschieden werden, ob die konvexe Hülle angewendet wird, oder nicht.

5.4.2 Umschreibendes Rechteck

Ein umschreibende Rechteck ist durch zwei gegenüberliegende Punkte, unten links („ul“) und oben rechts („or“) eindeutig bestimmt.

1. **Definition** Das umschreibende Rechteck ist wie folgt definiert. $R = (ul, or)$ mit

$$ul = (\min_{i \in P} x_i, \min_{i \in P} y_i)$$

$$or = (\max_{i \in P} x_i, \max_{i \in P} y_i)$$

Die Bestimmung der Fläche und des Umkreises ist trivial.

2. Beispiel

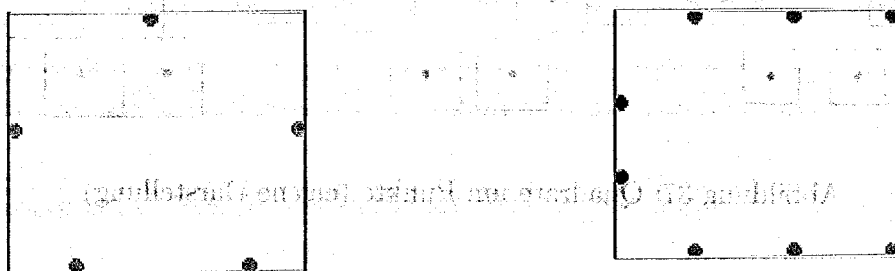


Abbildung 36: Umschreibendes Rechteck (eigene Darstellung)

3. Beispiele Wie in Abbildung 36 zu sehen, bekommt die hufeisenförmige Punktmenge (rechte Figur) wie bei der konvexen Hülle in Abbildung 34 keine realistische Fläche zugewiesen, während die Punktmenge links oben eine recht intuitive Fläche zugewiesen bekommt.

Figur links oben liefert im Schwartzberg-Test noch einen realistischen guten Wert von $Per_4 = 1,13$. Figur rechts aber liefert sogar noch einen besseren Wert als die konvexe Hülle ($Per_4 = 0,87$). Auch Figur links unten liefert einen viel zu guten Wert von $Per_4 = 1,12$.

Auch der Taylor-Test versagt, da, egal welche Punktmenge behandelt wird, immer ein optimaler Wert von 1,0 ausgegeben wird.

4. Bewertung Das umschreibende Rechteck ist eine einfache Methode, um aus Punktmengen Flächen zu bilden. Jedoch ist sie fehlerbehaftet, da z.B. aus hufeisen- oder winkelförmig angeordneten Punktmengen unrealistische, zu gute Flächen entstehen.

5.4.3 Eigener Ansatz

Ein Ansatz, aus Einzelpunkten Gebiete zu formen, ist, gleichgroße Quadrate um die Punkte zu legen, und diese schrittweise zu vergrößern, bis sich ein zusammenhängendes Gebiet

6 Zusammenfassung

Eingangs der Arbeit wurde die Literatur zu Kompaktheit in der politischen Gebietsplanung vorgestellt. Dabei wurde zunächst der Begriff Kompaktheit definiert und anschließend die wichtigsten quantitativen Maße für Gebiete vorgestellt.

Im Hauptteil wurde zunächst die Begriffe Verkaufsgebietsplanung und punktförmige Basisgebiete näher erläutert. Anschließend wurde das generelle Vorgehen vorgestellt, wie man die Kompaktheit von Verkaufsgebieten bestimmen kann:

Zunächst wurden die selbst entwickelten Kompaktheitsmaße für Punkte vorgestellt. Insgesamt ließ sich schlussfolgern, dass Kompaktheitsmaße für Punkte zwar gut berechenbar, aber defekt sind und kein guter Indikator für die Kompaktheit eines Gebiets sind.

Anschließend wurde auf die Möglichkeit der Bildung von Gebieten eingegangen, um statt der Kompaktheitsmaße für Punkte die aus der Literatur bekannten Kompaktheitsmaße für Flächen anzuwenden. Hier wurden das Raster von Laporte et al. und das Voronoi-Diagramm vorgestellt. Beide lieferten zusammen mit den Kompaktheitsmaßen für Flächen recht zufriedenstellende Ergebnisse.

Zuletzt wurden Möglichkeiten untersucht, aus Gebieten mittels der konvexen Hülle oder des umschreibenden Rechtecks Flächen zu Formen. Beide Ansätze sind jedoch fehlerbehaftet.

Ein guter, allgemein formulierbarer und berechenbarer Ansatz zur Bildung von Flächen aus Einzelpunkten konnte nicht entwickelt werden.

A Anhang 1

A.1 Erklärung

Tabelle 1: Streuungsmaße [nach Niemi et al., teilweise um Formeln ergänzt]

Länge zu Breite

*Dis*₁ - B/L - L ist die längste Achse und B ist das maximale Lot zur Achse (Harris 1964).

Die längste Achse kann dabei Gebiet verlassen, das Lot nicht.

*Dis*₂ - B/L - B und L sind die des umschreibenden Rechtecks mit minimalem Umfang.

*Dis*₃ - B/L - B und L sind die des umschreibenden Rechtecks, das das Gebiet an allen vier Seiten berührt und für das B/L maximal ist. Dies ist der Umkehrbruch von Youngs Maß, da so ein [0,1]-Intervall erreicht wird.

*Dis*₄ - B/L - L ist die längste Achse und B und L sind die eines umschreibenden Rechtecks, das das Gebiet an allen vier Seiten berührt.

*Dis*₅ - L-B - L ist die Nord-Süd und B ist die Ost-West-Achse.

*Dis*₆ - L-B - L und B gemessen wie in *Dis*₁.

Fläche zu Fläche-Maße

*Dis*₇ - Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit der Fläche des minimal-umschreibenden Kreises (Reock 1961). $Dis_7 = \frac{A_{\text{Gebiet}}}{A_{\text{Umkreis}}}$

*Dis*₈ - Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit dem minimal-umschreibenden regulären Sechseck. (Geisler 1985)

*Dis*₉ - Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit der Fläche der minimalen konvexen Figur, die das Gebiet komplett enthält.

*Dis*₁₀ - Verhältnis der Gebietsfläche zu Fläche des Kreises mit einem Durchmesser gleich der längsten Achse des Gebiets (Gibbs 1961). $Dis_{10} = \frac{A}{\pi(\frac{L}{2})^2}$

Flächenträgheitsmomente

*Dis*₁₁ - Flächenträgheitsmoment, also Entfernung aller Punkte des Gebiets zum Schwerpunkt des Gebiets (Kaiser 1966). Auf ein [0,1]-Intervall angepasst. Diese Variante ist die Quadratwurzel des Kaiser-Reziproks (1/V) bei Horn. $Dis_{11} = \frac{A}{\sqrt{2\pi \cdot T_{\text{Gebiet}}}}$ (T_{Gebiet} = Flächenträgheitsmoment des Gebiets)

*Dis*₁₂ - Durchschnittliche Entfernung des Schwerpunkts des Gebiets zu den Außenecken des Gebiets entlang einer Menge gleichmäßig entfernter Radiallinien. (Boyce and Clark 1964).

A. Bevölkerung des Gebiets waglichen mit der Bevölkerung einer kompakten Figur

1. Pop_1 - Verhältnis der Bevölkerung des Gebiets zur Bevölkerung in der minimalen konvexen Figur, die das Gebiet komplett enthält (Hoffeler 1990).
2. Pop_2 - Verhältnis der Bevölkerung des Gebiets zur Gesamtbevölkerung im minimalen umschreibenden Kreises (Hoffeler 1990).

B. Andere Maße

1. Pop_3 - Flächenträgheitsmoment der Bevölkerung (Weaver-Hess).
2. Papayanopoulos: Summe alle paarweisen Distanzen zwischen den Mittelpunkten der Gebietseinheiten, gewichtet mit der jeweiligen Bevölkerung.
3. Iowa Reapportionment Statute: Verhältnis vom Moment der Bevölkerung zum Mittelpunkt der Bevölkerung des Gebiets und dem Moment der Bevölkerung zum geografischen Mittelpunkt des Gebiets.

Tabelle 6: Reine Formmaße [nach Horn et al.]

A. Reine Flächenmaße

1. Absolute Abweichung von der Durchschnittsfläche.

B. Reine Umfangsmae

- 1.1. Summe der Gebietsumfänge. (Per_1)
- 1.2. Summe der ungenutzten Bausteinumfange.
2. Verhältnis des Gebietsumfangs zum Umfang des minimalen umschreibenden Kreises.

C. Streuungsmaße

1.1. Differenz zwischen Länge und Breite

- 1.1.1 $L-B$ wobei L auf einer Nord-Süd-Achse und B auf einer Ost-West-Achse gemessen wird. (Dis_5)
- 1.1.2 $L-B$ wobei L die längste Achse ist und B das maximale Lot zur längsten Achse ist. (Dis_6)

1.2. Verhältnis zwischen Länge und Breite

- 1.2.1 B/L mit B und L definiert wie in 1.1.2. (Dis_1)
- 1.2.2 B/L mit B und L als Seiten des umschreibenden Rechtecks mit minimalem Umfang. (Dis_2)
- 1.2.3 B/L mit B und L als Seiten des umschreibenden Rechtecks, das Gebiet an allen vier Seiten berührt, sodass L/B maximal wird. (Dis_3)
- 1.2.4 B/L wobei L die längste Achse ist und B und L Teil des Rechtecks, das das Gebiet an allen vier Seiten berührt, sind. (Dis_4)

Tabelle 2: Umfangsmaße [nach Niemi et al.]

Umfang allein Per_1 - Summe der Gebietsumfänge (Wells 1982)Umfang zu Fläche Vergleiche Per_2 - Verhältnis der Gebietsfläche zur Fläche eines Kreises mit gleichem Durchmesser.
(Cox 1927). $Per_2 = \frac{4\pi A}{P^2}$ $Per_3 = 1 - \sqrt{Per_2}$ Per_4 - Verhältnis des Gebietsumfangs zum Umfang eines Kreises mit gleicher Fläche
(Schwartzberg 1966). $Per_4 = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}} = \frac{1}{\sqrt{Per_2}}$ Per_5 - Umfang eines Gebiets als Prozentsatz des minimalen Umfangs, der die Fläche umschließt. $Per_5 = 100 \cdot Per_4 = \frac{100}{\sqrt{Per_2}}$

Tabelle 3: Bevölkerungsmaße [nach Niemi et al.]

Bevölkerung des Gebiets verglichen mit der Bevölkerung einer kompakten Figur Pop_1 - Verhältnis der Bevölkerung des Gebiets zur Bevölkerung der minimalen konvexen Figur, die das Gebiet komplett enthält (Hoffeler 1990). Pop_2 - Verhältnis der Bevölkerung des Gebiets verglichen mit der Bevölkerung des minimalen umschreibenden Kreises (Hoffeler 1990).Flächenträgheitsmoment Pop_3 - Flächenträgheitsmoment der Bevölkerung, normalisiert auf ein [0,1]-Intervall.

Tabelle 4: Andere Maße [nach Niemi et al.]

1. Theobald (1970): Absolute Abweichung von der durchschnittlichen Fläche.
2. Papayanopoulos (1973): Summe aller paarweise Entfernungen zwischen den Mittelpunkten der Gebietsbausteine, gewichtet mit ihrer jeweiligen Bevölkerung.
3. Taylor-Test (1973): $cPT_{Taylor} = \frac{N-R}{N+R}$ wobei N der Anzahl von nicht reflexiven Innenwinkeln und R der Anzahl von reflexiven Innenwinkeln entspricht.
4. Iowa Reapportionment Statute: „kombinierte“ Flächen, Umfang und Bevölkerungsmaße wie das Verhältnis vom Moment der Bevölkerung zum Mittelpunkt der Bevölkerung und dem Moment der Bevölkerung zum geografischen Mittelpunkt.

Tabelle 5: Form-Bevölkerungsmaße [nach Horn et al.]

2. Gebietsfläche verglichen mit der Fläche einer kompakten Figur

2.1 Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit dem minimalen umschreibenden Kreis. (Reock) (*Dis*₇)

2.2 Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit dem minimalen umschreibenden Sechseck. (*Dis*₈)

2.3 Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit der minimalen konvexen Figur, die das Gebiet komplett enthält. (*Dis*₉)

2.4 Verhältnis der Gebietsfläche verglichen mit der Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser, der der längsten Achse des Gebiets entspricht. (Gibbs) (*Dis*₁₀)

3. Gemischt

3.1 Durchschnittliche Distanz vom Gebietsmittelpunkt zum Gebietsumfang entlang einer Menge gleichmäßig entfernter Radiallinien. (Boyce-Clark) (*Dis*₁₂)

3.2.1 Verhältnis des Radius des größten Inkreises zum Radius des kleinsten Umkreises. (Haggett)

3.2.2 Verhältnis des Radius des kleinsten Umkreises zum „minimalen“ Radius.

D. Winkelmaße

1. Taylors Eindruck-Maß: $(N-R)/(N+R)$ mit N gleich der Anzahl der nicht reflexiven Innenwinkel; R ist die Anzahl der reflexiven Innenwinkel.

E. Fläche zu Umfang-Quotienten

1. Fläche zu Umfang-Verhältnis.

2. Fläche zu quadriertem Umfang-Verhältnisse

2.1 Fläche geteilt durch den quadrierten Umfang. (A/P^2)

2.2 Umfang geteilt durch die Quadratwurzel der Fläche. (P/\sqrt{A})

2.3.1 Gebietsfläche geteilt durch Kreisfläche mit gleichem Umfang: $4\pi A/P^2$. (Cox) (*Per*₂)

2.3.2 Gebietsfläche als Prozentsatz einer Kreisfläche gleichen Umfangs: $400\pi A/P^2$. (Goedicke) (*CI*)

2.4 $(1 - 2\sqrt{\pi A})/P$ (*Per*₃)

2.5 Gebietsumfang dividiert durch den Umfang eines Kreises gleicher Fläche. ($P/(2\sqrt{\pi A})$) (Schwartzberg) (*Per*₄)

2.6 Umfang eines Gebiets als Prozentsatz des minimalen Umfangs, der die Fläche umschließt. ($100P/(2\sqrt{\pi A})$) (*Per*₅)

F. Relative Flächenträgheitsmomente

Literatur

- [1] H. P. YOUNG: Measuring the Compactness of Legislative Districts, in *Legislative Studies Quarterly*, Vol. 13, No. 1 (Feb., 1988), pp. 105-115
- [2] RICHARD G. NIEMI, BERNARD GROFMAN, CARL CARLUCCI, THOMAS HOFFELER: Measuring Compactness and the Role of a Compactness Standard in a Test for Partisan and Racial Gerrymandering, in *The Journal of Politics*, Vol. 52, No. 4. (Nov., 1990), pp. 1155-1181.
- [3] DAVID L. HORN, CHARLES R. HAMPTON, ANTHONY J. VANDENBERG: Practical application of district compactness, in *Political Geography*, Vol. 12, No. 2, March 1993, 103-120.
- [4] ANGÉLICA SALAZAR-AGUILAR, ROGER Z. RÍOS-MERCADO, JOSÉ LUIS GONZÁLEZ-VELARDE: A bi-objective programming model for designing compact and balanced territories in commercial districting, in *Transportation Research Part C* 19 (2011) 885-895.
- [5] GILBERT LAPORTE, HONGTAO LEI, BO GUO: Districting for routing with stochastic customers in *EURO J Transp Logist* DOI 10.1007/s13676-012-0005-x.
- [6] STEFAN NICKEL: Standortplanung und strategisches Supply Chain Management, Vorlesungsfolien.